Aborder des problèmes avec la calculatrice graphique Classpad 330 PLUS

Par Jean-Philippe Blaise

CASIO®
www.casio-education.fr

Edito

Quelques mots pour vous présenter ce manuel dédié au ClassPad 330 PLUS.

Dans un premier temps, notez qu'il ne s'agit ni d'un mode d'emploi pour une prise en main de la calculatrice ni d'un manuel purement mathématiques.

J'ai pris le parti de ne pas détailler totalement ni les démonstrations mises en jeu dans chacun des problèmes que vous allez rencontrer, ni les actions à effectuer sur la calculatrice pour aboutir aux différentes captures d'écrans que j'ai utilisées en illustration.

Ainsi, ce manuel a plusieurs lectures : vous pouvez le feuilleter pour voir très rapidement le champ opérationnel de l'outil qui va du calcul formel à la géométrie dynamique, en passant par un tableur performant et des outils de résolutions d'équations, parfaitement adaptés à des problèmes complexes, cette liste n'étant pas exhaustive. Vous pouvez vous arrêter sur chacun des problèmes pour n'en lire que les énoncés et, vous faire une idée de votre chemin de résolution.

La calculatrice nous offre ainsi un prétexte pour illustrer un axe de démonstration pour chacun des sujets étudiés dans cet ouvrage.

Ainsi, nous allons aborder dès le premier chapitre, un mode CAS performant et une analyse d'une fonction jusque dans son tableau de variations.

Puis, «*Mains, menteur !*» va nous permettre de déplacer un problème arithmétique dans la dimension des graphes.

Nous rencontrerons aussi la probabilité avec un axe de vision déterminé où le tableur nous présente une réponse sure que nous vérifierons avec un algorithme programmé.

Un ouvrage de mathématiques sans un support historique n'est pas digne de ce nom. C'est pourquoi, nous étudierons la construction du carré de Ramanujan qui va nous apporter une approximation de Pi fortement appréciable. De plus dans la démonstration de cette construction, nous découvrirons avec quelle simplicité le ClassPad 330 PLUS, grâce à son mode CAS, saura s'adapter à nos exigences.

Mélanger la géométrie dynamique avec gestion de contraintes et le calcul formel est important pour avoir un outil homogène. Et donc, la loi des cosinus en sera l'illustration. Vous allez remarquer à quel point le calcul formel est sans limite. Il sera possible de calculer directement avec des paramètres représentant des longueurs sans avoir à les renommer. La démonstration d'Al-Kashi en sera simplement aisée.

Bien-entendu, il est impossible d'avoir un outil faisant de la géométrie dynamique sans proposer un lieu célèbre. Nous nous permettrons de revoir la parabole et l'ellipse ainsi que leurs caractéristiques géométriques.

Toujours pour mélanger les modes, le calcul formel nous permet d'avoir directement la valeur exacte de quelques sinus plus ou moins connus. Nous allons retrouver l'un d'entre eux lors de la construction d'un pentagone.

Enfin, par un sujet du BAC, nous allons finir par une fonction de la calculatrice qui permet rapidement de résoudre des équations différentielles.

Encore une fois, la vitesse de calculs et la facilité d'utilisation sont à l'honneur dans ces exemples.

Mathématicalement votre !

Jean-Philippe Blaise
CASIO Éducation

Sommaire

Partie 1 : Sujet de BAC, un outil de vérification et de validation 5

Partie 2 : Mains, menteur ! 11

Partie 3 : Des dés 17

Partie 4 : Approximation de π à l'aide d'une construction géométrique 27

Partie 5 : Démonstration du carré de Ramanujan 33

Partie 6 : Triangle et formule d'Al-Kashi 41

Partie 7 : Parabole et son foyer 49

Partie 8 : Pentagone et sinus 57

Partie 9 : Sujet de BAC, fonction dsolve() 61

Classpad 330 PLUS :
un outil de vérification et de validation

D'après le sujet de BAC (Inde 2009), exercice 1, partie A, épreuve commune à tous les candidats

EXERCICE 1, partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$\boldsymbol{f\,(x)\ =\ xe^{-x^2}}$$

On désigne par C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}\ , \vec{j}\ )$ du plan. Cette courbe est représentée ci-dessous (*Capture 1.3*).

1.
a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
(On pourra écrire, pour x différent de 0 : $f(x) = \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$).
b. Démontrer que *f* admet un maximum en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et calculer ce maximum.

2.
Soit a un nombre réel positif ou nul. Exprimer en unités d'aire et en fonction de a, l'aire $F(a)$ de la partie du plan limitée par la courbe *C*, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x\ =\ 0$ et $x\ =\ a$.
Quelle est la limite de $F(a)$ quand a tend vers $+\infty$?

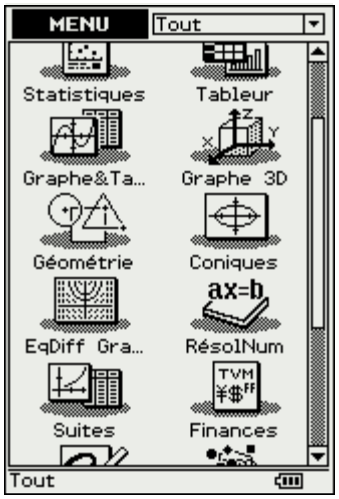
Pistes et interprétations : un outil de vérification et de validation

Il est évident que les réponses apportées par le mode CAS de la calculatrice n'ont pas de valeurs dans la rédaction des réponses à un sujet de BAC.

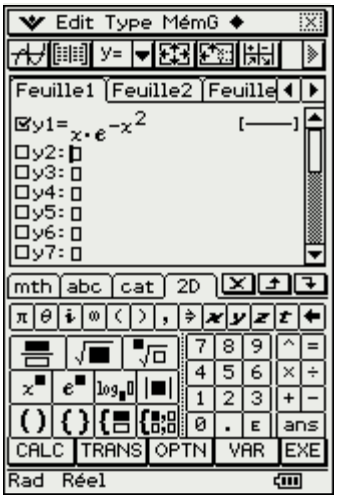
Néanmoins, il est intéressant d'avoir un outil à la disposition pour vérifier ou valider les démonstrations papiers avant de les rédiger proprement sur sa copie.

Voici donc, les réponses proposées par la calculatrice pour ce sujet 2009 dans une version purement géométrique puis, dans une version utilisant le calcul formel.

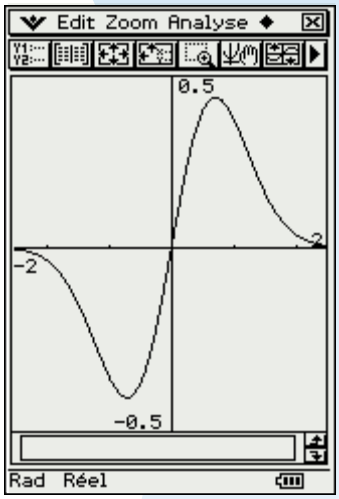
Partie 1 : prévisualisation et résolution en mode géométrie



Capture 1.1



Capture 1.2



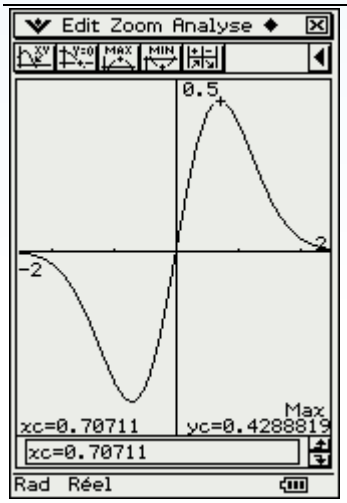
Capture 1.3

Dans le mode Graphique, nous allons définir directement la représentation de la fonction *f* (*capture 1.1*).

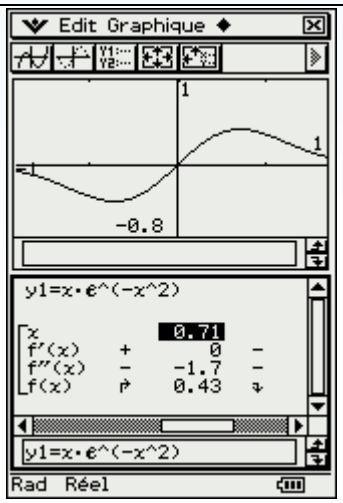
Le clavier tactile 2D permet d'avoir sous les yeux la forme correspondant exactement à l'énoncé (*capture 1.2).*

$$f(x) = xe^{-x^2}$$

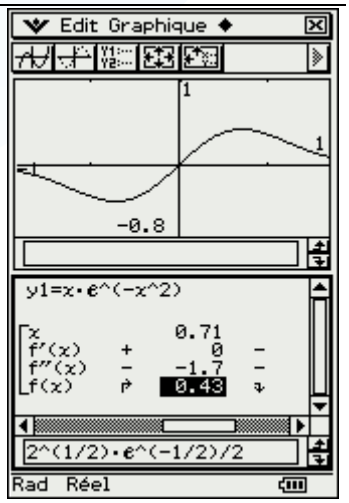
La représentation graphique est alors possible directement (capture 1.3)



Capture 1.4



Capture 1.5



Capture 1.6

Capture 1.4 : une fois la courbe représentée, il est possible de faire effectuer quelques calculs directement. Par exemple, on peut chercher le maximum. On trouve une valeur approchée qui semble connue :

$$x \approx 0.71$$

Capture 1.5 : l'utilisation du tableau de variation présent dans la calculatrice permet de retrouver une valeur exacte :

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

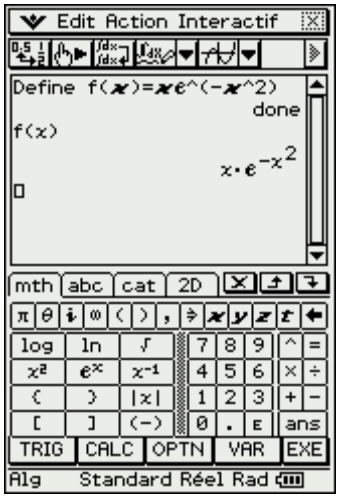
Capture 1.6 : en cliquant sur la valeur de l'ordonnée dans ce tableau, on a :

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^{\frac{1}{2}} \times \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2}$$

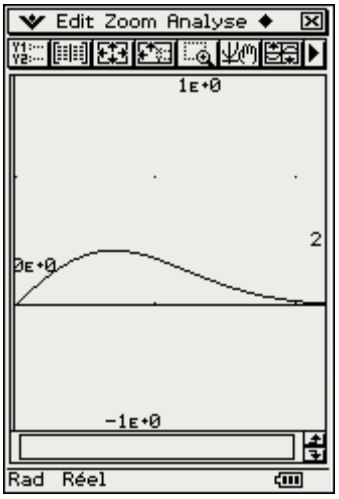
Soit,

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{e}}$$

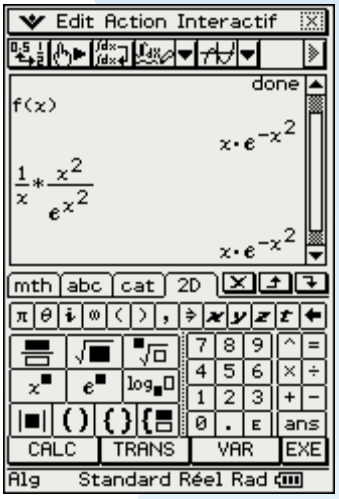
Partie 2 : un outil de vérification et validation dans le mode CAS



Capture 2.1



Capture 2.2

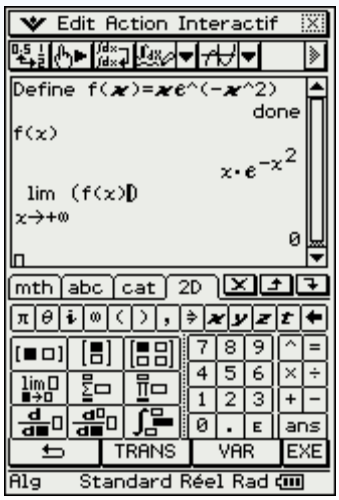


Capture 2.3

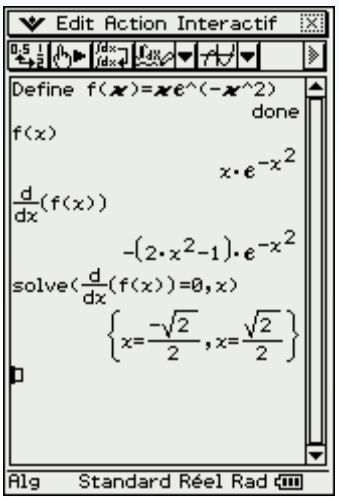
Il est possible de définir la fonction directement sur la calculatrice (*capture 2.1*).

Ce qui nous permet rapidement de pouvoir interagir entre les différents modes. Ainsi, on peut sans contraintes faire sa représentation graphique dans le mode Graph (*capture 2.2*) en définissant la courbe d'équation y=f(x).

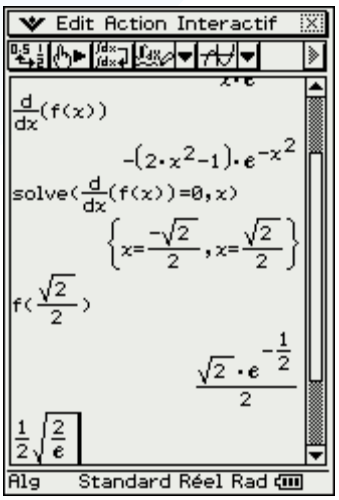
Un calcul rapide permet de vérifier l'égalité proposée dans la question 1.a. en indice (*capture 2.3*).



Capture 3.1



Capture 3.2



Capture 3.3

Capture 3.1 : nous trouvons la limite recherchée. L'indice de l'énoncé permettra de le prouver.

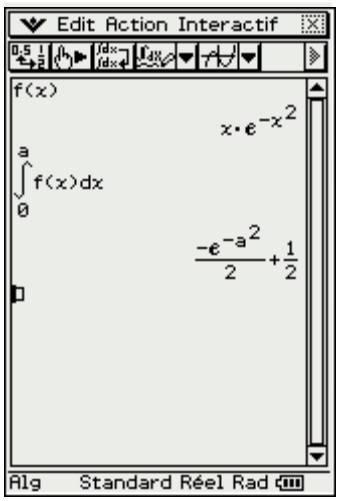
$$\lim_{x\to\infty} \boldsymbol{xe^{-x^2}} = 0$$

Capture 3.2 : le mode CAS de la calculatrice permet de calculer la fonction dérivée. Il suffit alors de l'interroger pour résoudre l'équation y'=0 qui nous donnera ses extremums. Ici, le maximum recherché.

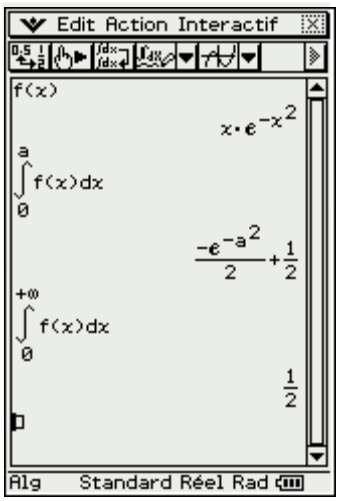
$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Capture 3.3 : nous connaissons maintenant la valeur de x qui nous donne un maximum, il suffit de la *glisser* dans la fonction f définie précédemment pour retrouver la valeur de f en son maximum.

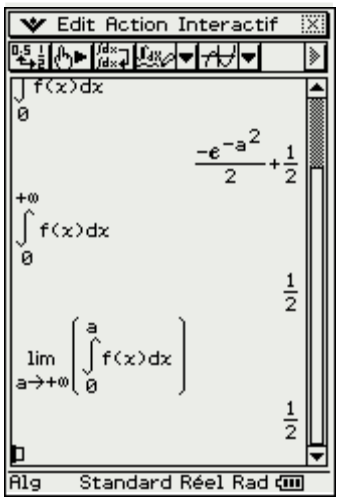
$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{e}}$$



Capture 4.1



Capture 4.2



Capture 4.3

Capture 4.1 : le travail autour de l'aire sous la courbe est en définition un travail d'intégration que nous pouvons questionner rapidement.

Capture 4.2 : on retrouve directement la réponse à la question 2.

Capture 4.3 : ce calcul de limite permet de faire calculer la réponse à la question 2. dans sa forme littérale (la limite de F(a) lorsque a tend vers $+\infty$).

Notes personnelles

Mains, menteurs !

Petit dialogue entre amis

« Hier, je suis allé à une réunion » dit Jean
« Et, alors ? » répondit Jacques
« On s'est tous serré la main … Et, j'ai compté 100 poignées de mains ! »
« T'es sûr ? »
« Oui … Oui … J'ai bien compté »
« Je pense que tu t'es trompé ! »
« IMPOSSIBLE !!! »

Qui a tort ? Jean ou Jacques ?

Pistes et réflexions

Dans un premier temps, nous allons chercher le nombre de participants à cette réunion en utilisant les indications de Jean

Puis, nous allons essayer de vérifier si n'importe quel nombre de poignées de mains donnent une réponse cohérente

Enfin, nous allons vérifier que pour chaque famille de nombres trouvés, une solution existe …

Partie 1 : Vérifions la proposition de Jean

Posons :

$$x : nombre\ de\ participants$$
$$n : nombre\ total\ de\ poignés\ de\ mains$$

Ici,

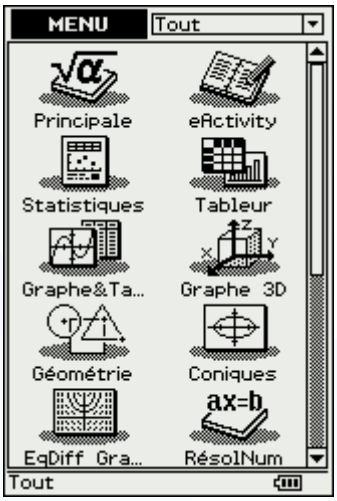
$$\boldsymbol{n = 100}$$

Si un certain nombre x de personnes se serre tous la main pour se saluer.
Nous avons pour chacun $(x - 1)$ poignées de mains.

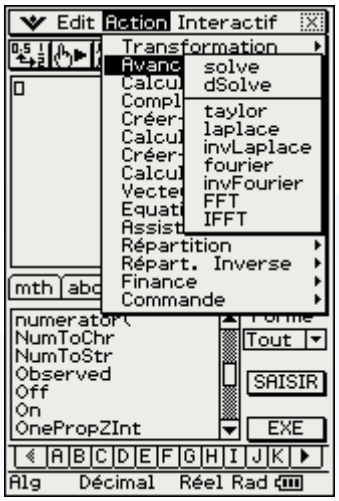
Donc, le nombre de poignées de mains vaut :

$$n = \frac{x(x-1)}{2}$$

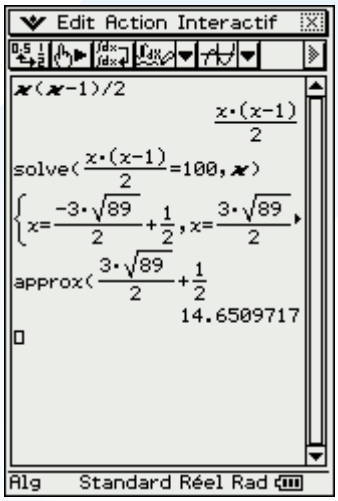
Car, si Jean serre la main à Jacques, il ne faut pas compter la poignée de main que fait Jacques à Jean.



Capture 1.1



Capture 1.2



Capture 1.3

Dans le *menu*, choisissons l'icône *Principale* (Capture 1.1) pour faire directement les calculs.
L'onglet *Action* permet d'avoir la fonction *solve* qui va résoudre de suite l'équation suivante :

$$n = \frac{x(x-1)}{2}\ avec\ n = 100$$

La seule solution positive valable pour ce problème est :

$$x = \frac{3\sqrt{89} - 1}{2} \approx 14{,}65$$

Il est impossible de ne pas avoir un nombre entier de participants donc, **Jean s'est trompé !**

Partie 2 : Nombre de poignées de mains adéquate

Intéressons-nous au nombre n qui aurait pu fonctionner dans cette réunion.
Pour quelle valeur proche de 100, le dialogue aurait été favorable à Jean ?

Il suffit de calculer le nombre de poignées de mains en fonction du nombre de participants.

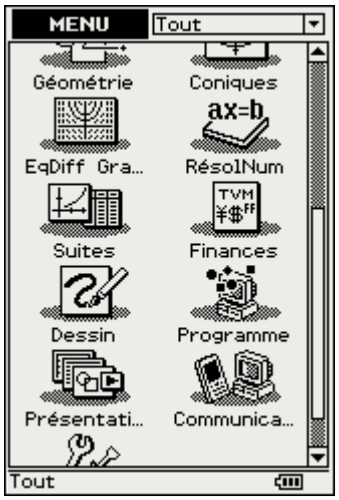
On cherche $n(x)$:

Posons :

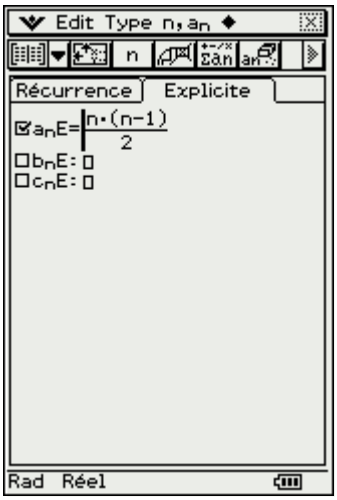
$$x : nombre\ de\ participants$$
$$n : nombre\ total\ de\ poignés\ de\ mains$$

Ici,

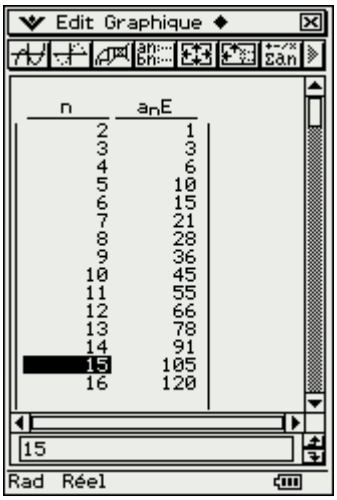
$$\boldsymbol{n = \frac{x(x-1)}{2}}$$



Capture 2.1



Capture 2.2



Capture 2.3

Dans le *menu*, choisissons l'icône *Suites* (Capture 2.1) pour gérer le nombre de participants en fonction de n.
Définissons la suite (a_n) de façon explicite (Capture 2.2):

$$a_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

Comme n est un nombre entier, les solutions proposées sont toutes cohérentes (Capture 2.3). On trouve donc deux solutions proches de 100 :

$$x = 14\ ou\ 15$$

Dans sa réunion, Jean aurait dû compter pour 14 participants : 91 mains serrées ou pour 15 participants 105.

Partie 3 : Nombre de poignées de mains adéquate

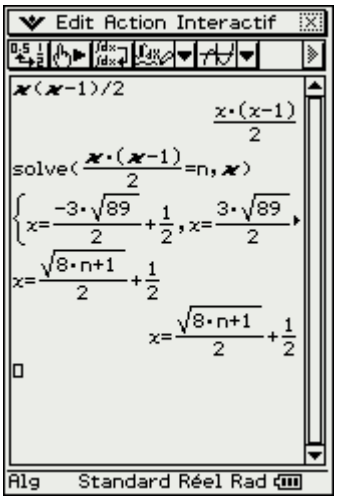
Reprenons le même questionnement en prenant le nombre de participants en fonction du nombre de poignées de mains.

On cherche $x(n)$:

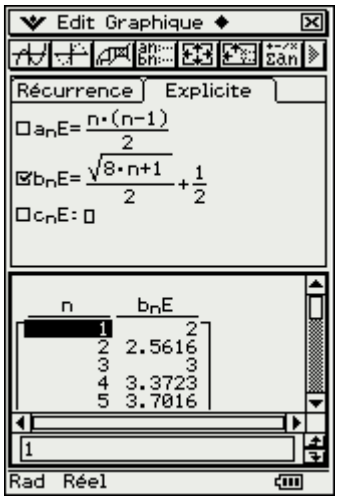
$$x : nombre\ de\ participants$$
$$n : nombre\ total\ de\ poignés\ de\ mains$$

Ici,

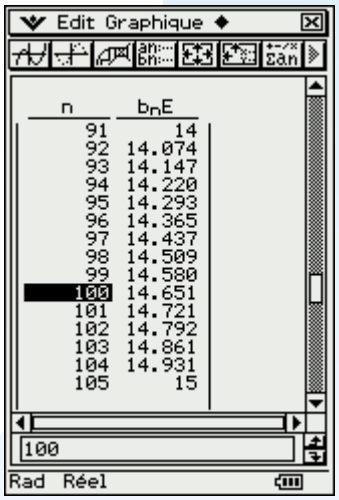
$$\boldsymbol{n = \frac{x(x-1)}{2}}$$



Capture 3.1



Capture 3.2



Capture 3.3

Retournons dans le mode *Principale* (Capture 3.1) pour calculer $en\ fonction\ de\ n$. La fonction Solve permet rapidement de faire le basculement de variables :

$$\boldsymbol{x = \frac{\sqrt{8n+1}+1}{2}}$$

Définissons la suite (b_n) de façon explicite (Capture 3.2). On retrouve que pour une seule poignée de mains, il n'y a que deux participants. Et, que pour 3, on en a 3 aussi !

La définition de cette suite fait apparaitre l'idée que tous les nombres ne donnent pas une réponse adéquate (Capture 3.3). On trouve donc, à nouveau, deux solutions proches de 100 :

$$x = 14\ ou\ 15$$

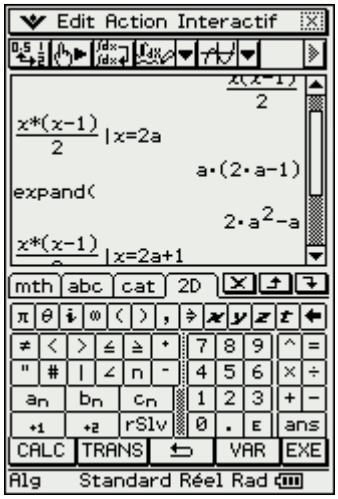
Jacques a du faire le calcul avec sa calculatrice pour vérifier si rapidement l'erreur de Jean

Partie 4 : Vérifions la notion de nombre entier

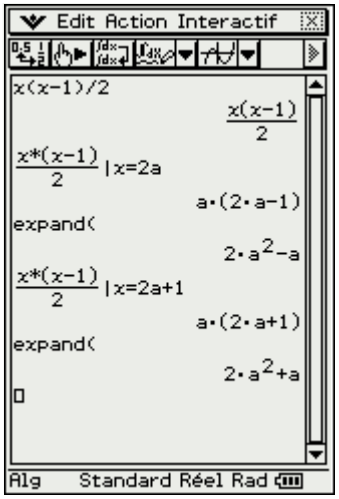
Dans la partie 2, nous avons l'égalité suivante :

$$\boldsymbol{n = \frac{x(x-1)}{2}}$$

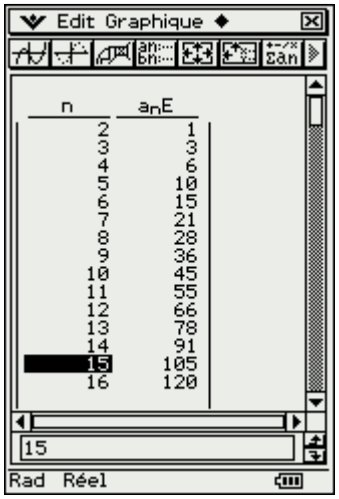
Or, une division par 2 apparait. Avons-nous toujours un nombre n entier pour chaque valeur entière de x ?



Capture 4.1



Capture 4.2



Capture 4.3

Le nombre de participants ne peut être que de pair ou impair donc, de la forme :

$$x = 2a \; ou \; 2a + 1$$

Avec a un nombre entier.

Retournons dans le mode *Principale* (Capture 4.1) et proposons le calcul en utilisant une astuce visible dans le clavier 2D avec l'utilisation de la barre affectant à une variable une valeur précise. Ici, calculons :

$$n = \frac{x(x-1)}{2} \; avec \; x = 2a$$

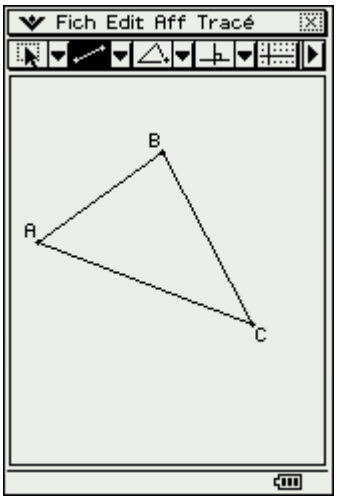
On trouve pour x pair ou impair, deux expressions à valeurs entières. Ce que nous avions déjà constaté dans la partie 2 (Capture 4.3).

Il semble évident que ce questionnement ne s'applique qu'artificiellement pour ce problème vu que pour un nombre entier de personnes se serrant la main, il parait évident que le nombre de mains serrées soit aussi un nombre entier.

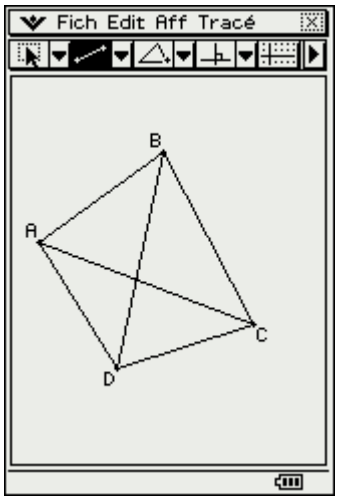
Partie 5 : Pour aller plus loin

Exemple 1 : graphe

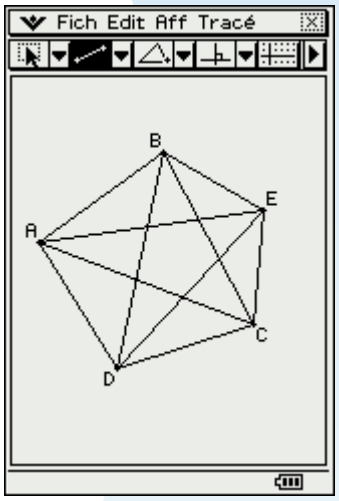
Soit n points, combien avons-nous de segments reliant chacun des points entre eux ?



Capture 5.1



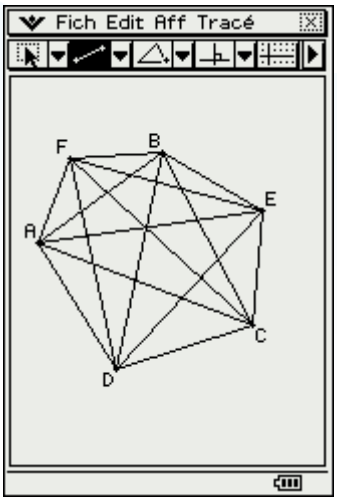
Capture 5.2



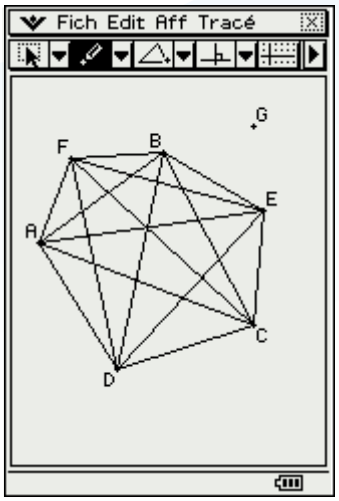
Capture 5.3

Cette version géométrique est équivalente à notre problème des mains. Pour un nombre n de points, on retrouve $\frac{n(n-1)}{2}$ segments tracés.

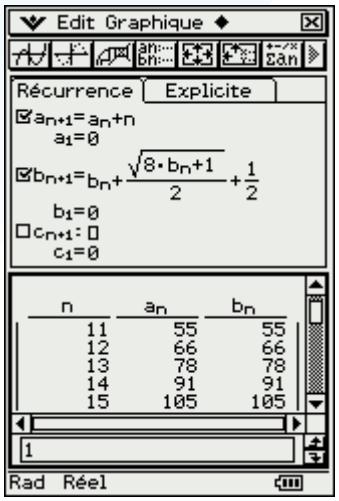
Exemple 2 : définissons la suite représentant les poignées de mains non plus de façon explicite mais de façon récurrente.



Capture 5.4



Capture 5.5



Capture 5.5

L'idée est d'utiliser le travail précédent.
On retrouve un questionnement équivalent si on rajoute un point sur le graphe existant (Capture 5.4).
Un point supplémentaire permet d'avoir un nombre de segments défini rapidement.
On retrouve dès lors une solution acceptable (Capture 5.5).

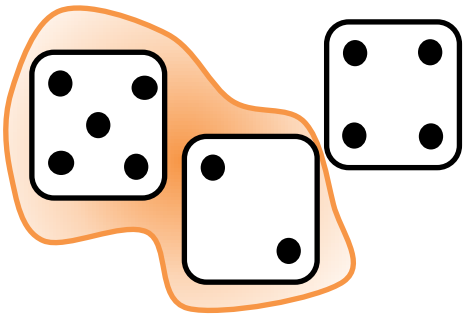
Des dés

Lançons trois dés à 6 faces.

Je gagne si la différence du plus grand dé et du plus petit dé est plus petite que le dé restant.

Est-ce un jeu favorable pour moi ?

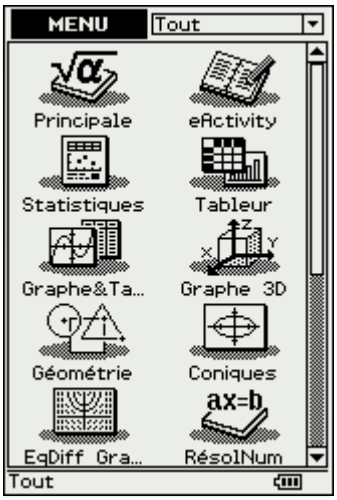
Mise en place :



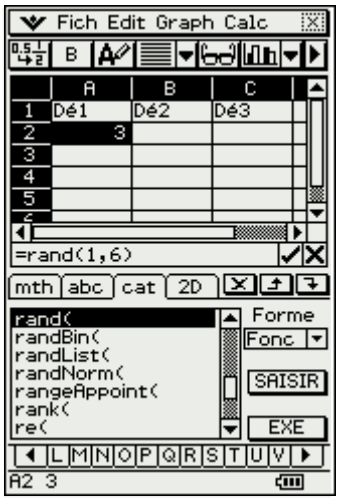
- *Directement au tableur nous allons créer une simulation de ce jeu*
- *Détail de tous les cas pour avoir une probabilité réelle.*
- *En algorithmique, nous allons lancer un grand nombre d'expérience pour vérifier l'hypothèse précédente.*

Simulation au tableur

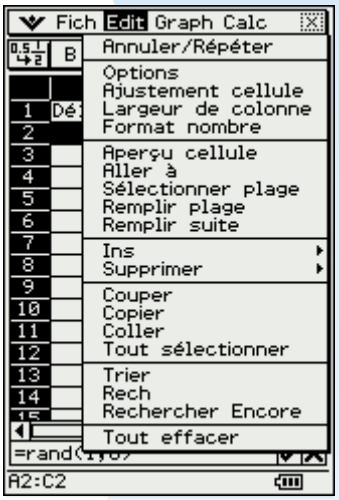
Le problème de cet exercice vient du fait qu'il va falloir classer les dés pour obtenir le dé restant.



Capture 1.1



Capture 1.2



Capture 1.3

Capture 1.1 : Dans le menu *principale*, choisissons le mode *Tableur*.

Capture 1.2 : La fonction *Rand()* permet de faire un tirage pseudo-aléatoire.
Ici, nous avons privilégié directement le tirage d'un nombre entier entre 1 et 6 :

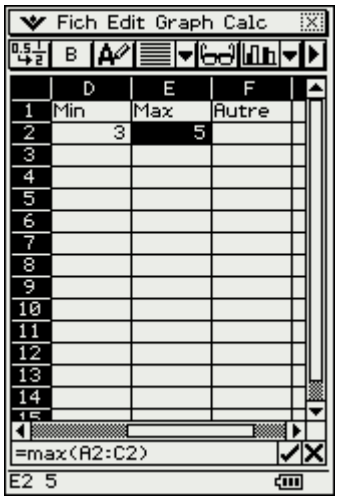
$$A2 = rand(1{,}6)$$

Nous aurions pu utiliser cette fonction sans paramètre et définir la case sous la forme :

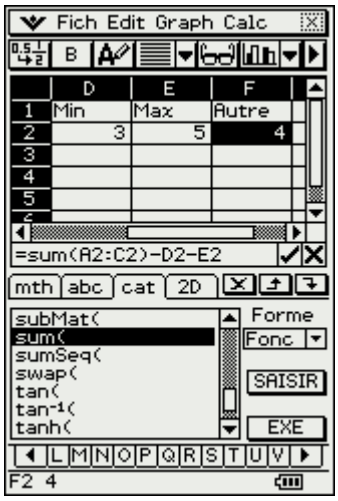
$$A2 = int(6 \times rand()) + 1$$

Ici, la fonction rand() renvoie un nombre aléatoire entre 0 et 1

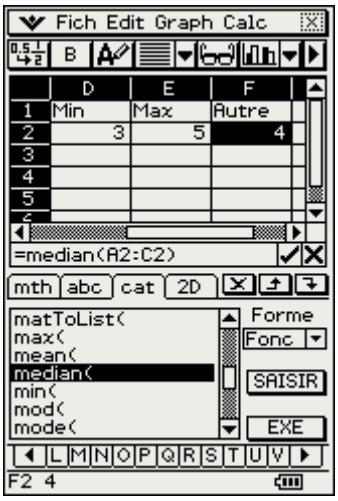
Capture 1.3 : L'utilisation du stylet permet de sélectionner classiquement les cases pour gérer des copier/coller adéquats. Nous avons donc un tirage aléatoire en A2, B2 et C2 de trois dés.



Capture 2.1



Capture 2.2



Capture 2.3

Capture 2.1 : Dans les colonnes D et E, commençons notre classement en faisant apparaitre le minimum et le maximum :

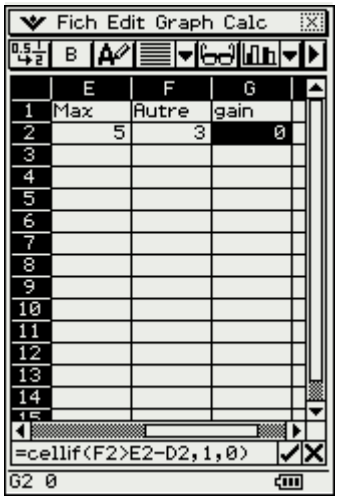
$$D2 = \min(A2{:}\,C2)$$
$$E2 = \max(A2{:}\,C2)$$

Capture 2.2 : Pour retrouver le dé intermédiaire, nous pouvons utiliser une astuce. Il suffit d'additionner les trois dés et d'enlever les extrémums :

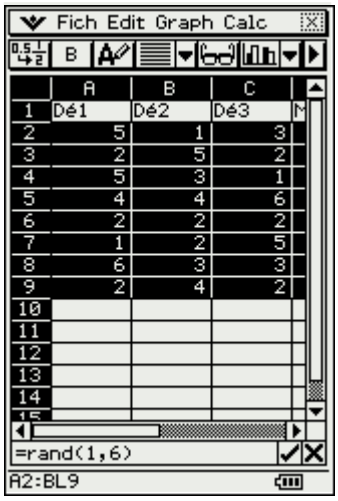
$$F2 = sum(A2{:}\,C2) - D2 - E2$$

Capture 2.3 : Comme nous travaillons avec un nombre impair de dés, il est plus intéressant de choisir la fonction median() :

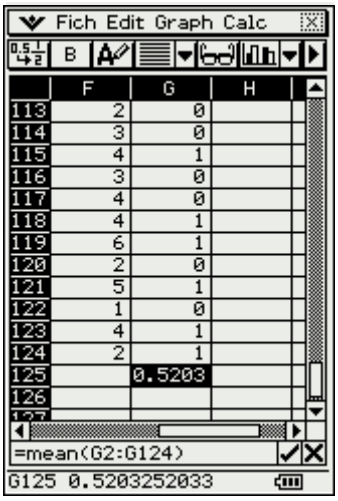
$$\boldsymbol{F2 = median(A2{:}\,C2)}$$



Capture 2.4



Capture 2.5



Capture 2.6

Capture 2.4 : Posons dans la colonne G (gain), une condition permettant de vérifier si nous avons gagné (1) ou perdu (0). Le choix de proposer les nombres 1 ou 0 permet de pouvoir ultérieurement faire un calcul de moyenne.

$$G2 = \text{cellif}(\text{F2} > \text{E2} - \text{D2}, 1, 0)$$

Nous retrouvons ici, le calcul de la différence entre le dé maximum et le dé minimum. Puis, une vérification de la condition de jeu. Attention, dans cet exemple : nous ne gagnons que si notre dé médian est strictement supérieur à la différence.

Capture 2.5 : L'utilisation du stylet permet à nouveau de gérer quelques copier/coller pour répéter ce tirage aléatoire sur les lignes suivantes.

Capture 2.6 : Il suffit de calculer la moyenne de cet ensemble de tirages aléatoires :

$$\boldsymbol{F2 = mean(G2{:}G124)}$$

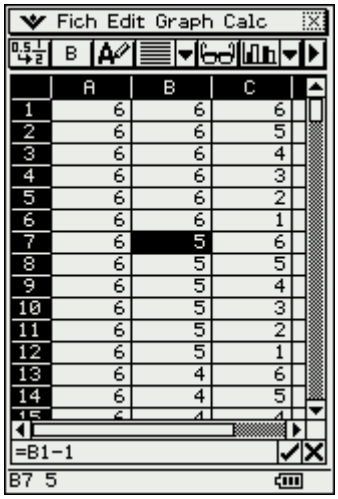
Par exemple, pour nos 123 lignes de tirages, nous trouvons une probabilité de gain d'environ :

$$\mathbf{52}\%$$

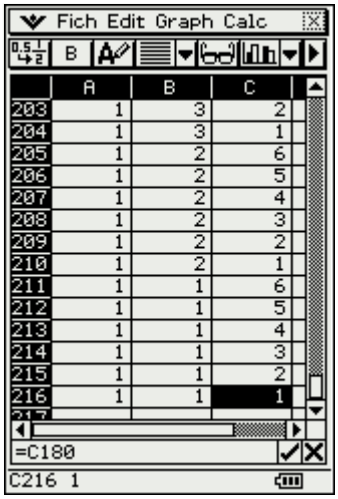
Il est évident que ce nombre n'est qu'une approximation pour un échantillon réduit et qu'il ne reflète que la mise en place d'une simulation et non une démonstration que ce jeu est favorable à celui qui privilégie le dé médian.

Démonstration

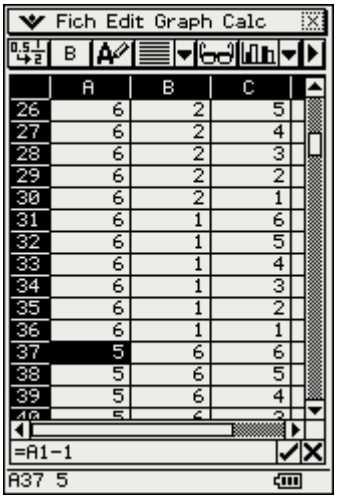
Pour répondre à la question directement. Nous allons référencer tous les cas possibles.



Capture 3.1



Capture 3.2



Capture 3.3

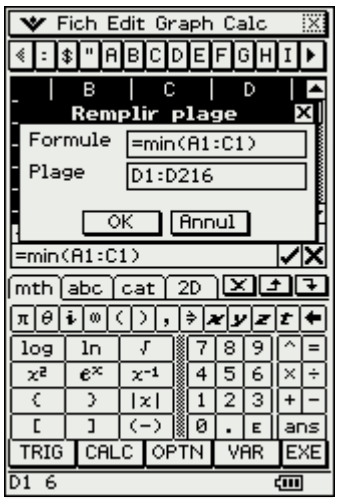
Capture 1.1 : Un travail autour du référencement des cas est à envisager. Comment faire apparaitre tous les cas possibles ? La colonne C va nous aider. Il suffit de faire apparaitre les nombres de 1 à 6. Et, de démarrer les autres colonnes à 6.

Capture 3.2: Nous obtiendrons 216 lignes de possibilités :

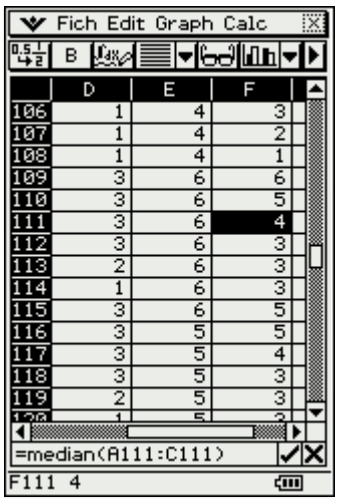
$$6^3 = 216$$

Capture 3.3: A la ligne 37 ($6^2 = 36$), il suffit de changer la valeur du premier dé (colonne 1)

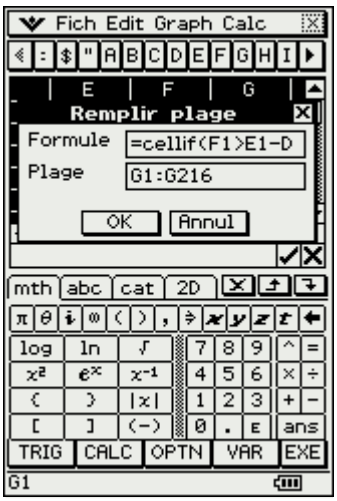
$$\boldsymbol{A37 = A1 - 1}$$



Capture 3.4



Capture 3.5

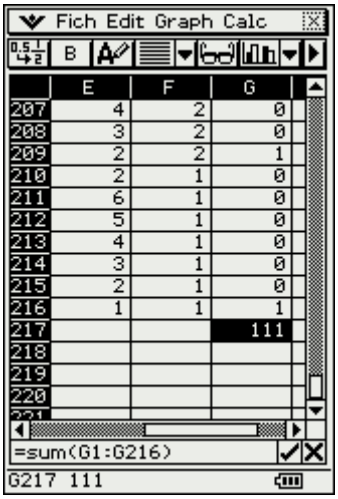


Capture 3.6

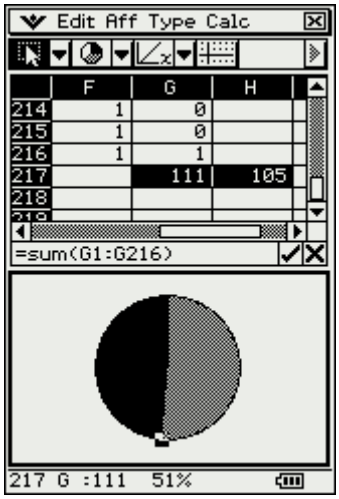
Capture 3.4 : La fonction *remplir plage()* permet directement de retrouver dans la colonne D, le minimum de chaque tirage.

Capture 3.5: Faisons de même pour les colonnes D et E qui vont représenter le maximum et le médian.

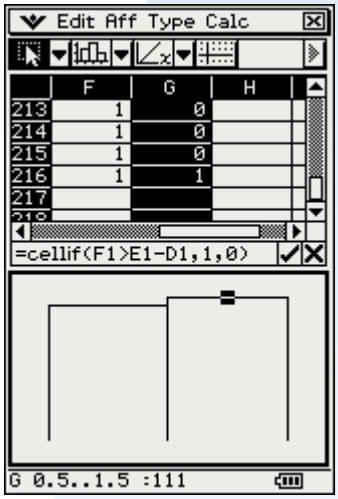
Capture 3.6: L'utilisation des plages que l'on remplit automatiquement permet aussi de gérer directement notre colonne G de gain avec la formule conditionnelle.



Capture 3.7



Capture 3.8



Capture 3.9

Capture 3.7 : Comptons le nombre de tirages ayant une issue favorable.

$$\boldsymbol{Proba(jeu\ favorable) = \frac{111}{216}}$$

Soit environ :

51,4 %

Capture 3.8: On peut l'illustrer par un diagramme circulaire en sélectionnant les valeurs trouvées.

Capture 3.9: L'illustration en histogramme permet de ne pas avoir à calculer la somme des cas favorables. Elle apparait directement en choisissant la colonne G.

Liste et tirages 1 à 114

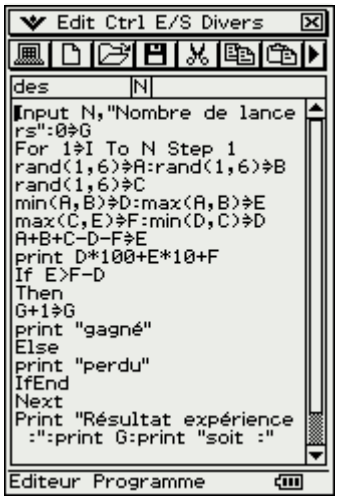
Tirages				Tri			Gain	Tirages				Tri			Gain	Tirages				Tri			Gain
N°	Dé1	Dé2	De3	Min	Médian	Max		N°	Dé1	Dé2	De3	Min	Médian	Max		N°	Dé1	Dé2	De3	Min	Médian	Max	
1	6	6	6	6	6	6	1	39	5	6	4	4	5	6	1	77	4	6	2	2	4	6	0
2	6	6	5	5	6	6	1	40	5	6	3	3	5	6	1	78	4	6	1	1	4	6	0
3	6	6	4	4	6	6	1	41	5	6	2	2	5	6	1	79	4	5	6	4	5	6	1
4	6	6	3	3	6	6	1	42	5	6	1	1	5	6	0	80	4	5	5	4	5	5	1
5	6	6	2	2	6	6	1	43	5	5	6	5	5	6	1	81	4	5	4	4	4	5	1
6	6	6	1	1	6	6	1	44	5	5	5	5	5	5	1	82	4	5	3	3	4	5	1
7	6	5	6	5	6	6	1	45	5	5	4	4	5	5	1	83	4	5	2	2	4	5	1
8	6	5	5	5	5	6	1	46	5	5	3	3	5	5	1	84	4	5	1	1	4	5	0
9	6	5	4	4	5	6	1	47	5	5	2	2	5	5	1	85	4	4	6	4	4	6	1
10	6	5	3	3	5	6	1	48	5	5	1	1	5	5	1	86	4	4	5	4	4	5	1
11	6	5	2	2	5	6	1	49	5	4	6	4	5	6	1	87	4	4	4	4	4	4	1
12	6	5	1	1	5	6	0	50	5	4	5	4	5	5	1	88	4	4	3	3	4	4	1
13	6	4	6	4	6	6	1	51	5	4	4	4	4	5	1	89	4	4	2	2	4	4	1
14	6	4	5	4	5	6	1	52	5	4	3	3	4	5	1	90	4	4	1	1	4	4	1
15	6	4	4	4	4	6	1	53	5	4	2	2	4	5	1	91	4	3	6	3	4	6	1
16	6	4	3	3	4	6	1	54	5	4	1	1	4	5	0	92	4	3	5	3	4	5	1
17	6	4	2	2	4	6	0	55	5	3	6	3	5	6	1	93	4	3	4	3	4	4	1
18	6	4	1	1	4	6	0	56	5	3	5	3	5	5	1	94	4	3	3	3	3	4	1
19	6	3	6	3	6	6	1	57	5	3	4	3	4	5	1	95	4	3	2	2	3	4	1
20	6	3	5	3	5	6	1	58	5	3	3	3	3	5	1	96	4	3	1	1	3	4	0
21	6	3	4	3	4	6	1	59	5	3	2	2	3	5	0	97	4	2	6	2	4	6	0
22	6	3	3	3	3	6	0	60	5	3	1	1	3	5	0	98	4	2	5	2	4	5	1
23	6	3	2	2	3	6	0	61	5	2	6	2	5	6	1	99	4	2	4	2	4	4	1
24	6	3	1	1	3	6	0	62	5	2	5	2	5	5	1	100	4	2	3	2	3	4	1
25	6	2	6	2	6	6	1	63	5	2	4	2	4	5	1	101	4	2	2	2	2	4	0
26	6	2	5	2	5	6	1	64	5	2	3	2	3	5	0	102	4	2	1	1	2	4	0
27	6	2	4	2	4	6	0	65	5	2	2	2	2	5	0	103	4	1	6	1	4	6	0
28	6	2	3	2	3	6	0	66	5	2	1	1	2	5	0	104	4	1	5	1	4	5	0
29	6	2	2	2	2	6	0	67	5	1	6	1	5	6	0	105	4	1	4	1	4	4	1
30	6	2	1	1	2	6	0	68	5	1	5	1	5	5	1	106	4	1	3	1	3	4	0
31	6	1	6	1	6	6	1	69	5	1	4	1	4	5	0	107	4	1	2	1	2	4	0
32	6	1	5	1	5	6	0	70	5	1	3	1	3	5	0	108	4	1	1	1	1	4	0
33	6	1	4	1	4	6	0	71	5	1	2	1	2	5	0	109	3	6	6	3	6	6	1
34	6	1	3	1	3	6	0	72	5	1	1	1	1	5	0	110	3	6	5	3	5	6	1
35	6	1	2	1	2	6	0	73	4	6	6	4	6	6	1	111	3	6	4	3	4	6	1
36	6	1	1	1	1	6	0	74	4	6	5	4	5	6	1	112	3	6	3	3	3	6	0
37	5	6	6	5	6	6	1	75	4	6	4	4	4	6	1	113	3	6	2	2	3	6	0
38	5	6	5	5	5	6	1	76	4	6	3	3	4	6	1	114	3	6	1	1	3	6	0

Liste et tirages 115 à 216

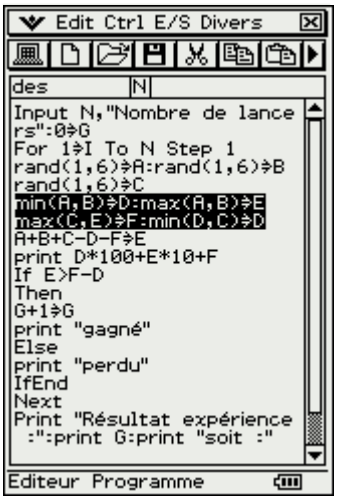
Tirages				Tri				Tirages				Tri				Tirages				Tri			
N°	Dé1	Dé2	De3	Min	Médian	Max	Gain	N°	Dé1	Dé2	De3	Min	Médian	Max	Gain	N°	Dé1	Dé2	De3	Min	Médian	Max	Gain
115	3	5	6	3	5	6	1	153	2	5	4	2	4	5	1	191	1	5	2	1	2	5	0
116	3	5	5	3	5	5	1	154	2	5	3	2	3	5	0	192	1	5	1	1	1	5	0
117	3	5	4	3	4	5	1	155	2	5	2	2	2	5	0	193	1	4	6	1	4	6	0
118	3	5	3	3	3	5	1	156	2	5	1	1	2	5	0	194	1	4	5	1	4	5	0
119	3	5	2	2	3	5	0	157	2	4	6	2	4	6	0	195	1	4	4	1	4	4	1
120	3	5	1	1	3	5	0	158	2	4	5	2	4	5	1	196	1	4	3	1	3	4	0
121	3	4	6	3	4	6	1	159	2	4	4	2	4	4	1	197	1	4	2	1	2	4	0
122	3	4	5	3	4	5	1	160	2	4	3	2	3	4	1	198	1	4	1	1	1	4	0
123	3	4	4	3	4	4	1	161	2	4	2	2	2	4	0	199	1	3	6	1	3	6	0
124	3	4	3	3	3	4	1	162	2	4	1	1	2	4	0	200	1	3	5	1	3	5	0
125	3	4	2	2	3	4	1	163	2	3	6	2	3	6	0	201	1	3	4	1	3	4	0
126	3	4	1	1	3	4	0	164	2	3	5	2	3	5	0	202	1	3	3	1	3	3	1
127	3	3	6	3	3	6	0	165	2	3	4	2	3	4	1	203	1	3	2	1	2	3	0
128	3	3	5	3	3	5	1	166	2	3	3	2	3	3	1	204	1	3	1	1	1	3	0
129	3	3	4	3	3	4	1	167	2	3	2	2	2	3	1	205	1	2	6	1	2	6	0
130	3	3	3	3	3	3	1	168	2	3	1	1	2	3	0	206	1	2	5	1	2	5	0
131	3	3	2	2	3	3	1	169	2	2	6	2	2	6	0	207	1	2	4	1	2	4	0
132	3	3	1	1	3	3	1	170	2	2	5	2	2	5	0	208	1	2	3	1	2	3	0
133	3	2	6	2	3	6	0	171	2	2	4	2	2	4	0	209	1	2	2	1	2	2	1
134	3	2	5	2	3	5	0	172	2	2	3	2	2	3	1	210	1	2	1	1	1	2	0
135	3	2	4	2	3	4	1	173	2	2	2	2	2	2	1	211	1	1	6	1	1	6	0
136	3	2	3	2	3	3	1	174	2	2	1	1	2	2	1	212	1	1	5	1	1	5	0
137	3	2	2	2	2	3	1	175	2	1	6	1	2	6	0	213	1	1	4	1	1	4	0
138	3	2	1	1	2	3	0	176	2	1	5	1	2	5	0	214	1	1	3	1	1	3	0
139	3	1	6	1	3	6	0	177	2	1	4	1	2	4	0	215	1	1	2	1	1	2	0
140	3	1	5	1	3	5	0	178	2	1	3	1	2	3	0	216	1	1	1	1	1	1	1
141	3	1	4	1	3	4	0	179	2	1	2	1	2	2	1								
142	3	1	3	1	3	3	1	180	2	1	1	1	1	2	0								
143	3	1	2	1	2	3	0	181	1	6	6	1	6	6	1								
144	3	1	1	1	1	3	0	182	1	6	5	1	5	6	0								
145	2	6	6	2	6	6	1	183	1	6	4	1	4	6	0								
146	2	6	5	2	5	6	1	184	1	6	3	1	3	6	0								
147	2	6	4	2	4	6	0	185	1	6	2	1	2	6	0								
148	2	6	3	2	3	6	0	186	1	6	1	1	1	6	0								
149	2	6	2	2	2	6	0	187	1	5	6	1	5	6	0								
150	2	6	1	1	2	6	0	188	1	5	5	1	5	5	1								
151	2	5	6	2	5	6	1	189	1	5	4	1	4	5	0								
152	2	5	5	2	5	5	1	190	1	5	3	1	3	5	0								

Simulation en algorithme

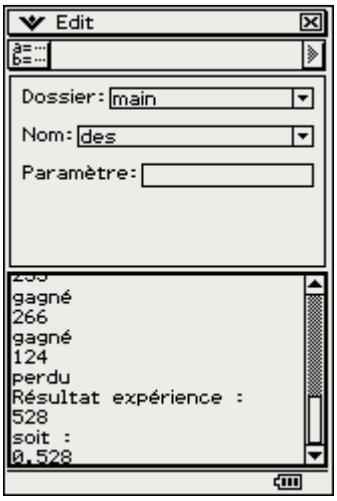
Créons un programme permettant de vérifier la valeur théorique.



Capture 4.1



Capture 4.2



Capture 4.3

Capture 4.1 : Dans le menu principal, choisissons le mode *Programme.* Nous allons proposer le choix du nombre de lancers :

$$input\ N, "Nombres\ de\ lancers"$$

La boucle *For* va permettre l'exécution du programme pour le nombre de simulations voulues :

$$For\ To\ Step\ Next$$

Capture 4.2 : Programmons le tri des valeurs tirées.

Capture 4.3 : Il suffit de lancer le programme, ici pour 1000 tirages nous trouvons :

$$\frac{\mathbf{528}}{\mathbf{1000}} = \mathbf{52,8}\%$$

Notes personnelles

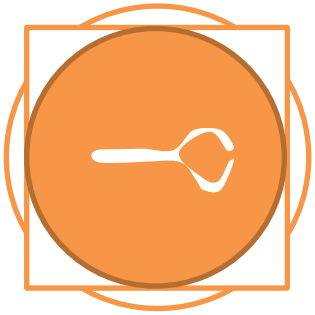
Approximation de π à l'aide d'une construction géométrique

Le mathématicien Ramanujan (1887-1920) est l'auteur d'une construction géométrique permettant d'approximer π en la construction d'un carré ayant une aire proche de π

Essayons de reproduire sur notre ClassPad 330 PLUS cette construction décrite ci-dessous.

L'utilisation de la géométrie de *contraintes* de notre calculatrice va nous permettre une construction plus rapide sans avoir à faire de nombreuses figures à cacher.

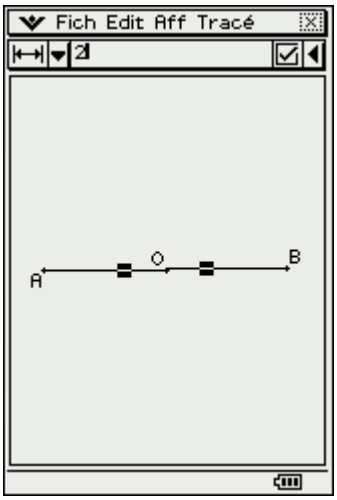
Construction :



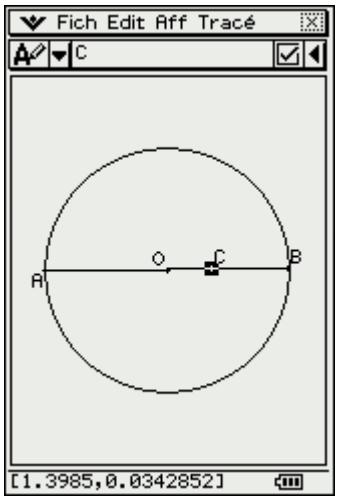
NB : Les points utiles à la construction suivent un ordre alphabétique à l'exception du centre du cercle (O) et du milieu du segment (I) et des points associés (O' et C') …

1. Tracer un cercle φ de centre O et de diamètre 2 unités et prenons un diamètre [AB]
   Dessiner le point C du segment [AB] tel que $OC = \frac{2}{3} OB$
2. Dessiner le point D comme l'un des points d'intersection du cercle φ et de la perpendiculaire à [AB] passant par C.
3. Sur le même demi-cercle, placer un point E tel que BE=CD.
4. La parallèle à (BE) passant par O coupe (AE) en O'.
5. La parallèle à (BE) passant par C coupe (AE) en C'.
6. Placer le point F sur la tangente en A au cercle tel que AF=O'C' et que F se trouve sur le demi-plan délimité par le diamètre [AB] ne contenant pas le point C.
7. Dans ce même plan, dessiner sur le cercle le point G tel que AG = AO'
8. Soit I le milieu du segment [AO]. Placer le point K sur le segment [BG] tel que BK = BI.
9. Soit le point L du segment [BF] tel que (KL)//(FG)
10. Il suffit de dessiner le carré de côté [BL].

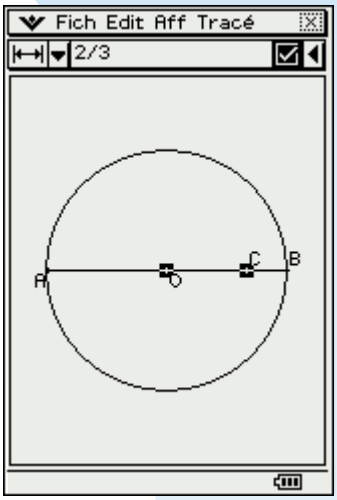
1ere Partie : Construction explicative



Capture 1.1



Capture 1.2

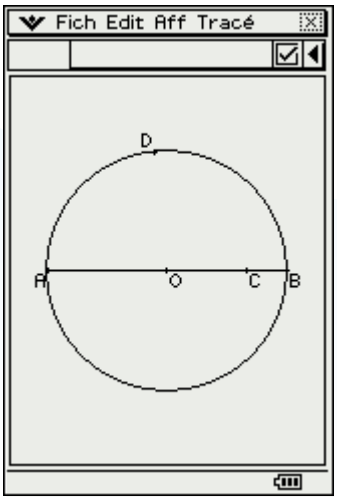


Capture 1.3

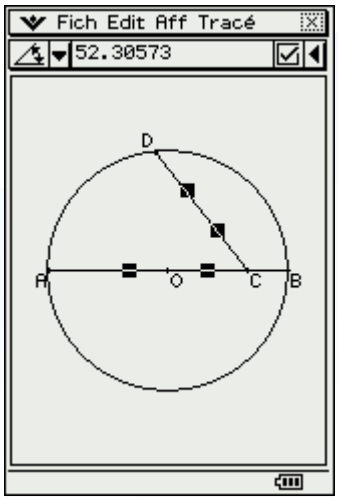
Capture 1.1 : On dessine un segment [AB] puis, son milieu (que l'on renomme directement en O). Ensuite, il suffit de sélectionner le segment [AB] pour lui affecter la longueur 2 unités.

Capture 1.2 : Création du cercle puis, on pose sur [AB] un point que l'on renomme C. Inutile de chercher à « découper » le segment car, on va pouvoir lui affecter la longueur voulue.

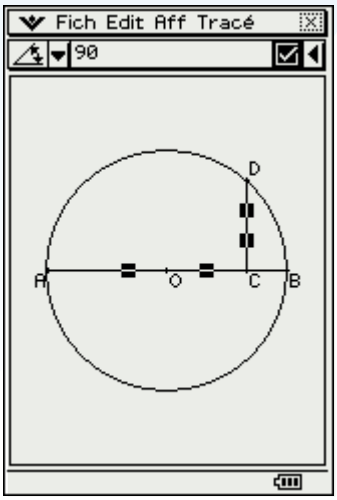
Capture 1.3 : En sélectionnant le point O et le point C, on obtient un onglet longueur permettant d'y faire figurer les $\frac{2}{3}$ attendus.



Capture 2.1



Capture 2.2

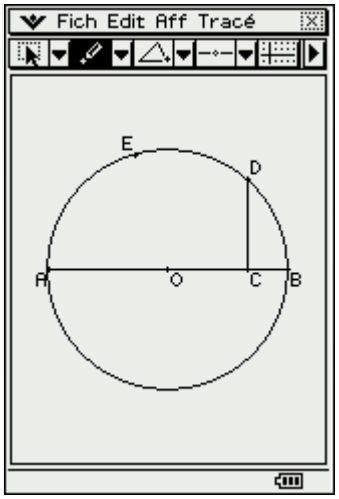


Capture 2.3

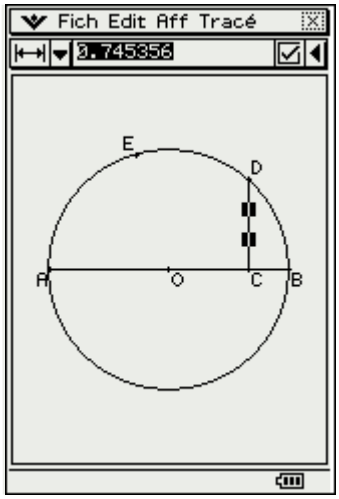
Capture 2.1 : Pour ce faire, il suffit de placer un point D sur le cercle et de dessiner le segment [CD]

Capture 2.2 : En sélectionnant le diamètre [AB] et le segment [CD], la mesure de l'angle apparait.

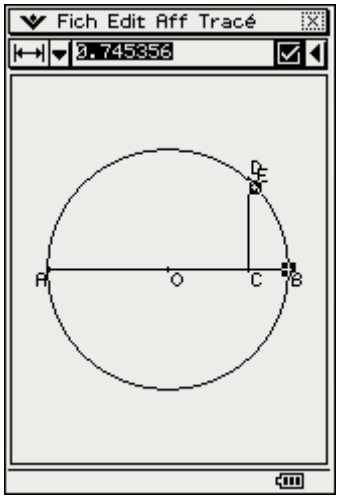
Capture 2.3 : Il suffit de la modifier pour avoir la perpendiculaire attendue.



Capture 3.1

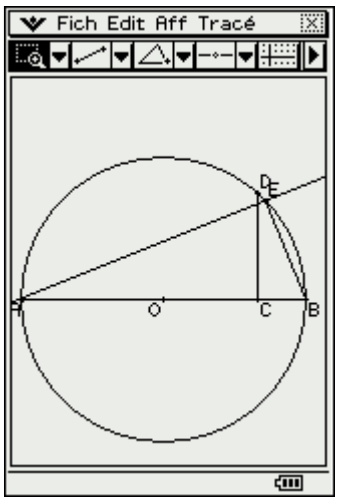


Capture 3.2

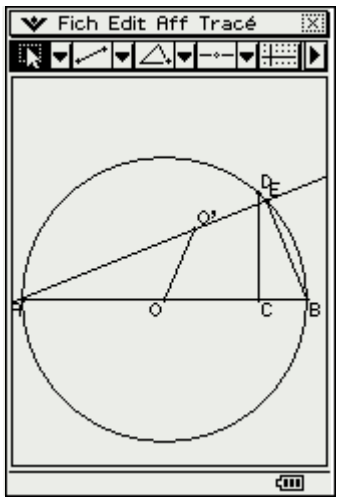


Capture 3.3

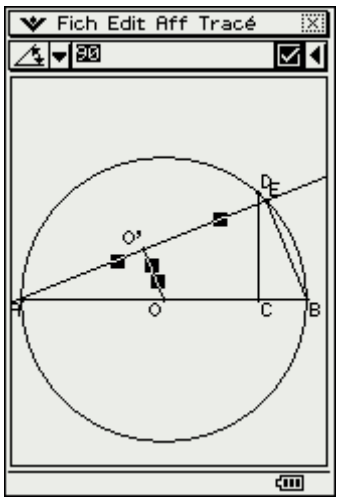
Capture 3.1 : A nouveau déposons à l'aide du stylet, un point E sur le cercle.
Capture 3.2 : En sélectionnant le segment [CD], on peut copier la longueur CD.
Capture 3.3 : Il suffit de cliquer sur les points E et B et de coller la valeur copiée. Le point E se positionne directement.



Capture 4.1

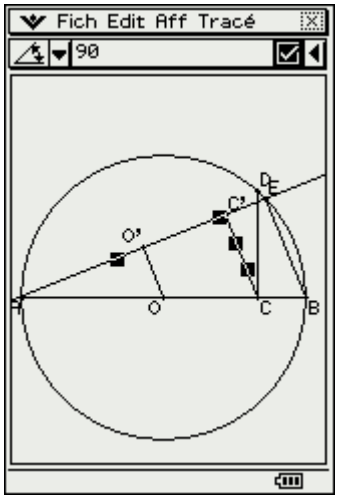


Capture 4.2

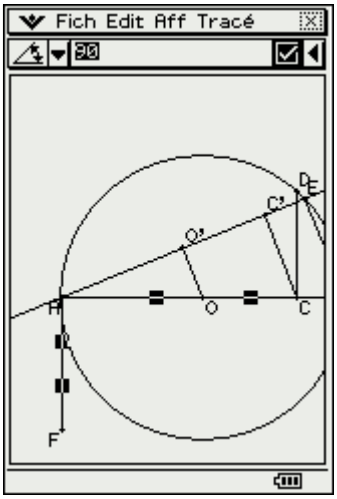


Capture 4.3

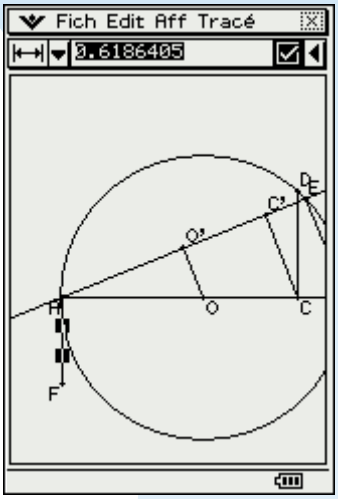
Capture 4.1 : Traçons la droite (AE) puis le segment [EB].
Capture 4.2 : Traçons un segment [OO'] en glissant O' sur la droite (AE)
Capture 4.3 : En remarquant que le triangle AEB est rectangle en E, il suffit d'imposer l'angle droit au point O'.



Capture 5.1



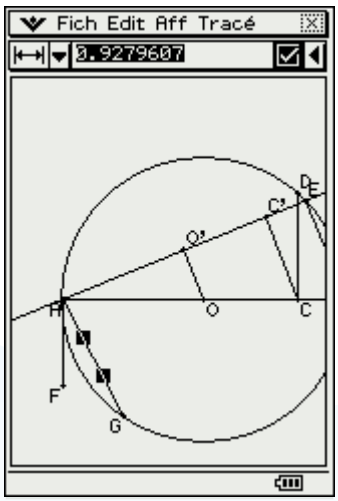
Capture 6.1



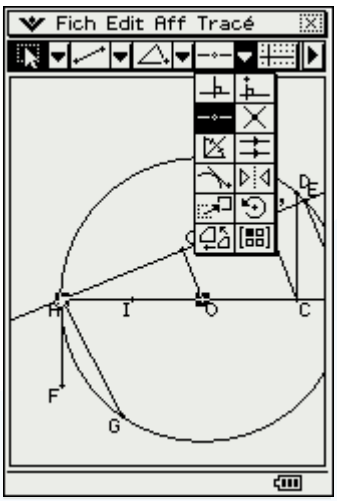
Capture 6.2

Capture 5.1 : Faisons de même pour le point C'

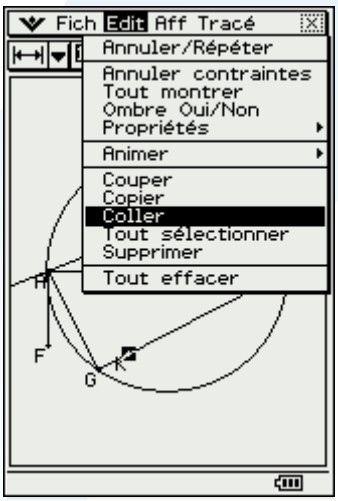
Capture 6.2 : Traçons un segment [AF] et imposons l'angle droit (pour respecter la tangente).
Capture 6.3 : Il suffit de *copier/coller* la longueur O'C' et de l'affecter au segment [AF].



Capture 7.1

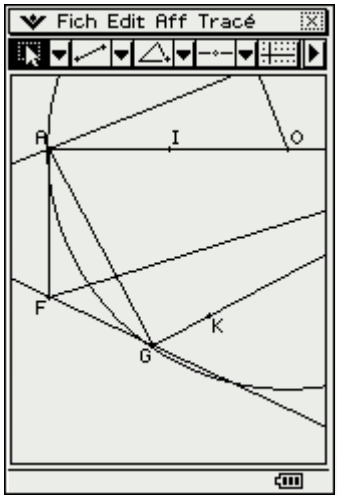


Capture 8.1

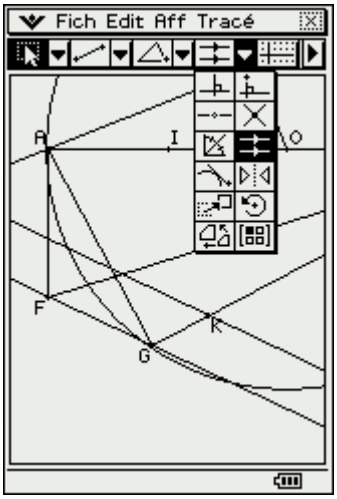


Capture 8.2

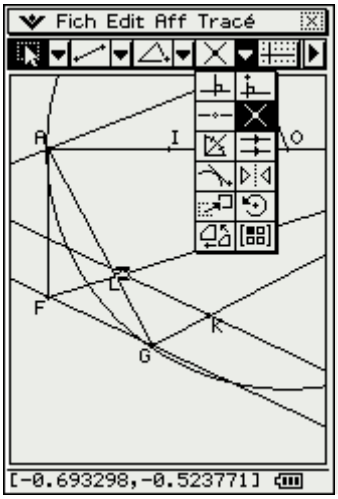
Capture 7.1 : A nouveau imposons deux contraintes : le point G est glissé sur le cercle et la longueur AG = AO'.
Capture 8.1 : Il suffit de sélectionner les deux points A et O et de cliquer sur l'onglet *milieu*.
Capture 8.2 : A nouveau la manipulation se fait en quelques clics.



Capture 9.1

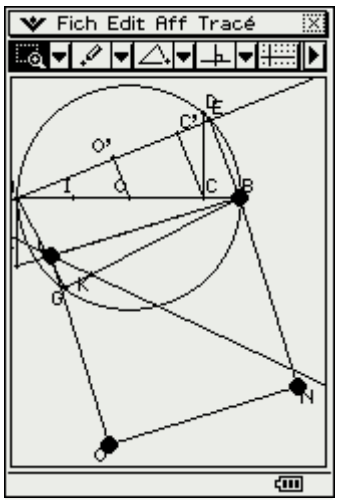


Capture 9.2

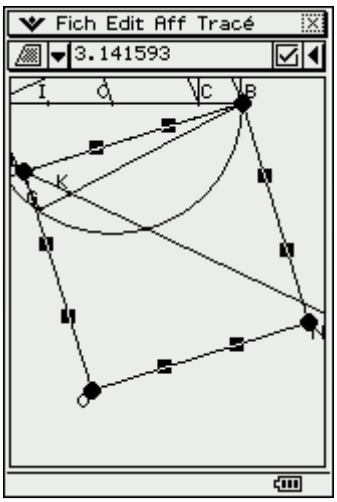


Capture 9.3

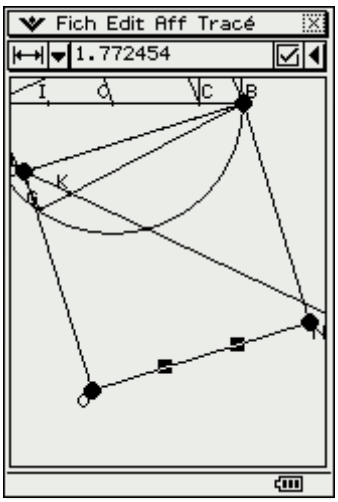
Capture 9.1 : Dessinons la droite (FG) ainsi que le segment [BF]
Capture 9.2 : Représentons la parallèle à (FG) passant par le point K.
Capture 9.3 : Nommons L son intersection.



Capture 10.1

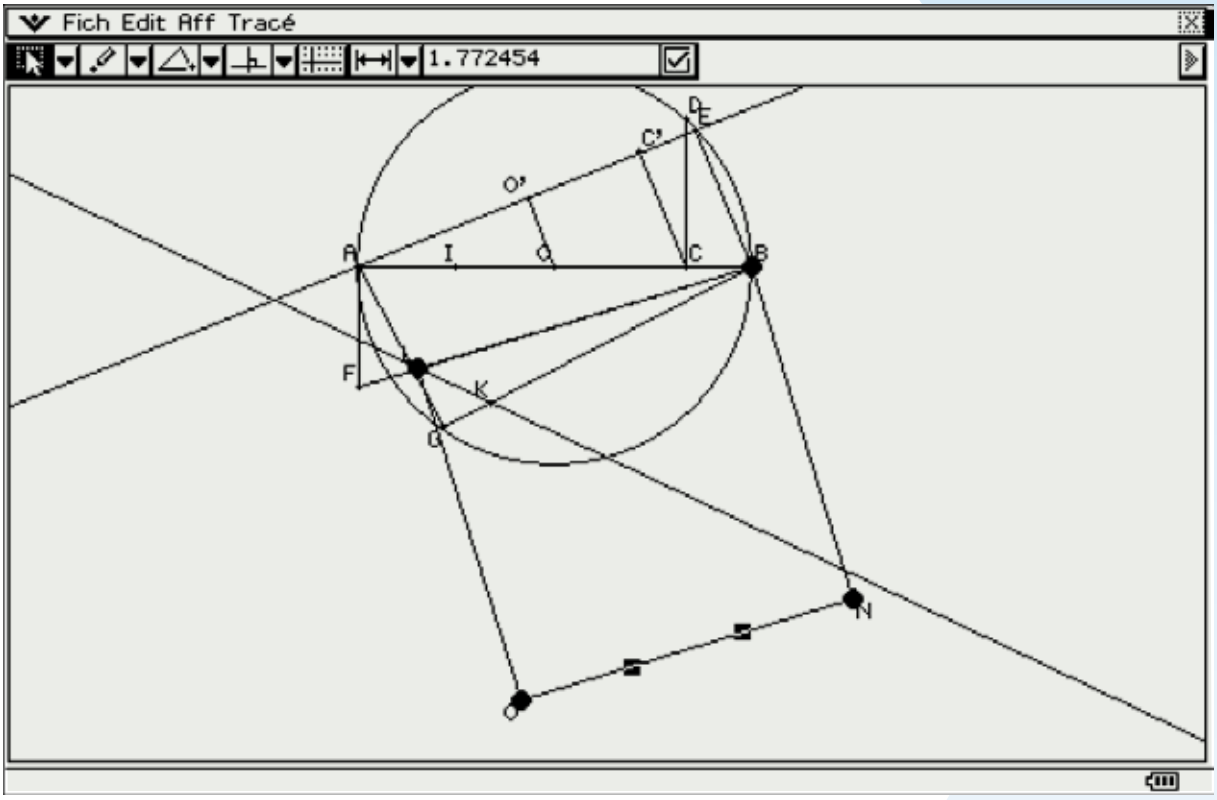


Capture 10.2



Capture 10.3

Capture 10.1 : Création du carré BLON
Capture 10.2 : En sélectionnant les côtés, l'aire apparait ! Ouf : c'est environ π
Capture 10.3 : En ne sélectionnant qu'un côté, on retrouve la longueur BL.



La figure attendue.

Démonstration du carré de Ramanujan

Essayons de donner quelques pistes pour retrouver via le calcul l'égalité définie par la construction du carré de Ramanujan :

$$\sqrt{\frac{355}{113}}^{2} \approx \pi$$

Pourquoi avoir gardé le radical dans cette approximation ?

Pour garder en tête, le fait que la construction proposée permet de construire un carré en partant de la longueur de l'un de ses côtés et d'obtenir une aire approchant π.

Mise en place de la démonstration

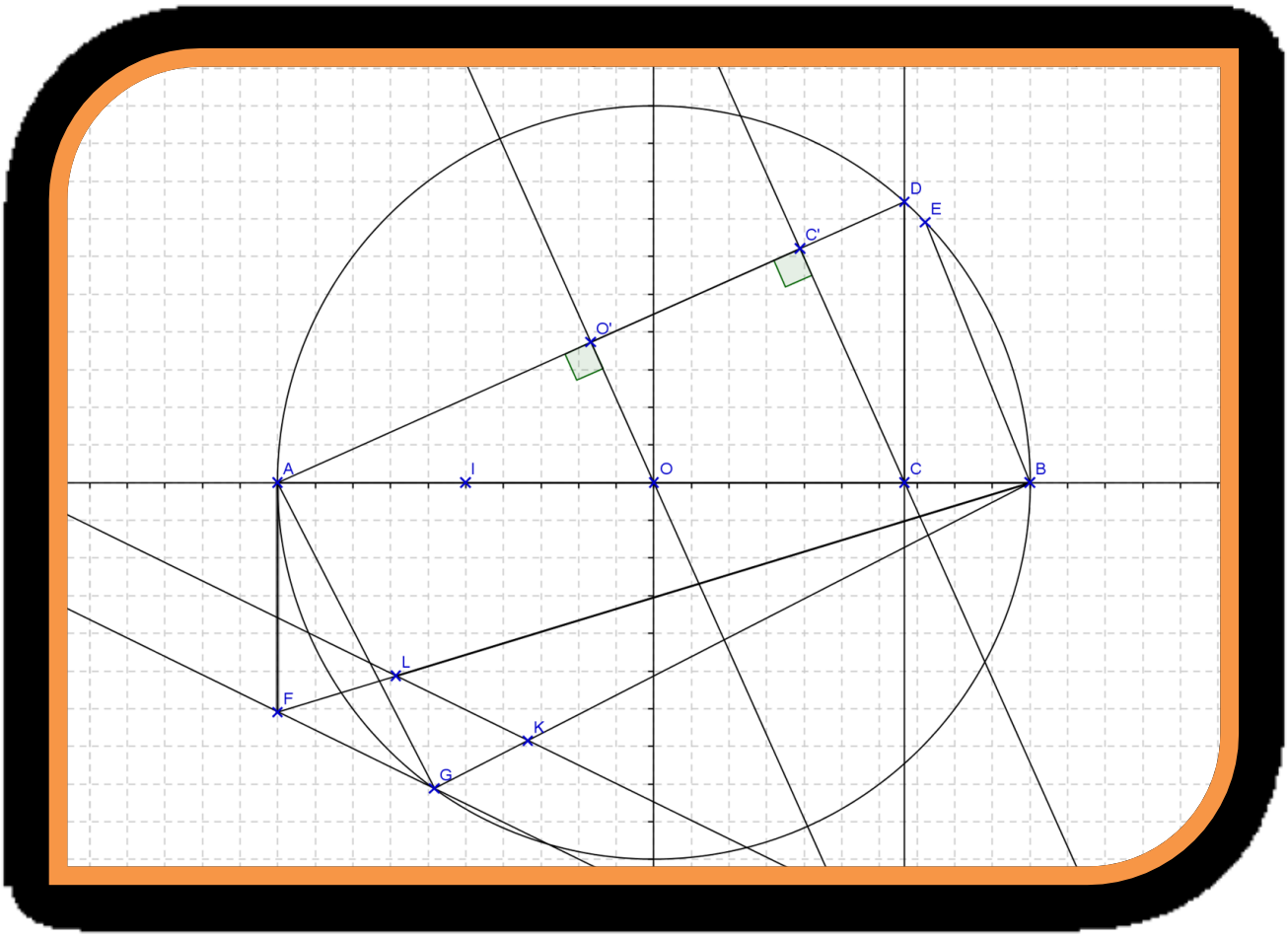
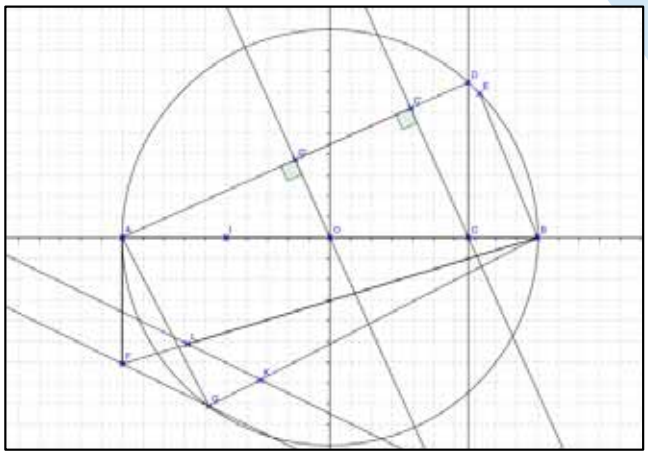
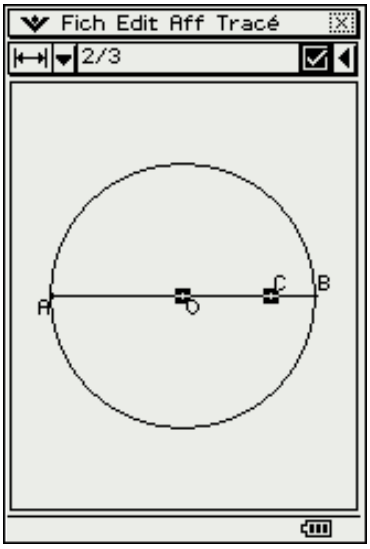
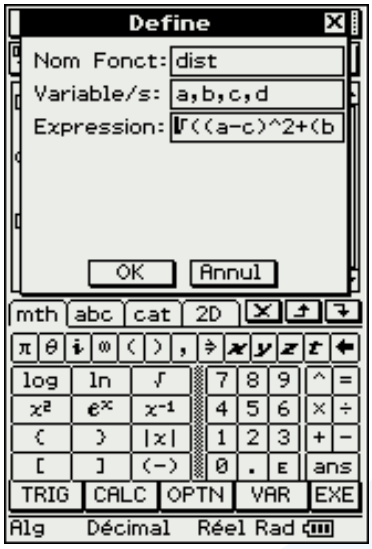
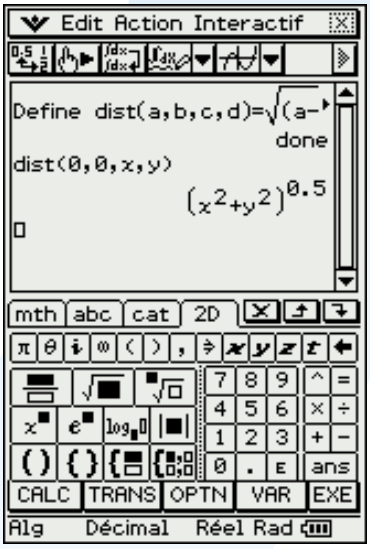


Figure finale :









Capture 1.1 *Capture 1.2* *Capture 1.3*

Capture 1.1 : Dans un repère orthonormé de centre O, nous définissons le cercle d'équation :

$$\varphi : x^2 + y^2 = 1$$

On a de plus :

$$A\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \text{ et } B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

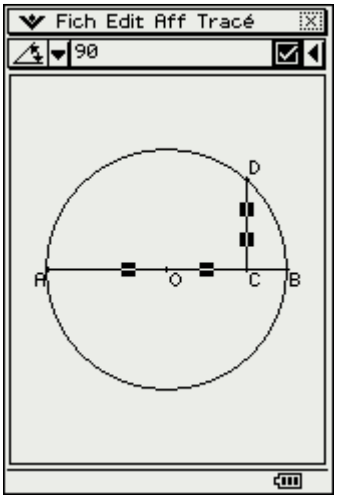
Capture 1.2 : Comme le programme de construction définit des points en fonction de leurs distances les uns par rapport aux autres, nous allons avoir besoin souvent de calculer la distance entre deux points dans ce repère.

$$MN = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2}$$

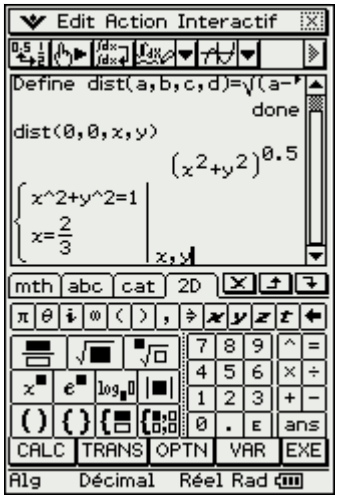
Capture 1.3 : La création de la fonction dist(a,b,c,d) va nous être utile :

$$\boldsymbol{dist(a,b,c,d) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}}$$

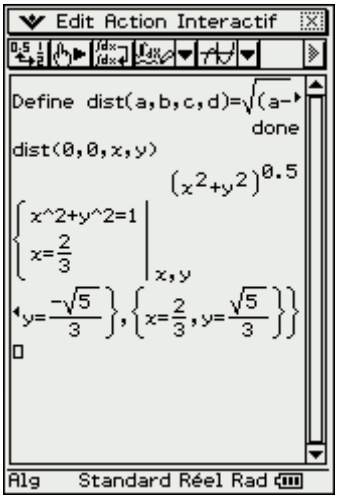
Notons, qu'il est possible sans grande difficulté de créer une fonction avec plusieurs paramètres sur notre calculatrice.



Capture 2.1



Capture 2.2



Capture 2.3

Capture 2.1 : Le point D est défini comme étant sur le cercle et d'abscisse connue ($x = \frac{2}{3}$)

Capture 2.2 : Dans le mode 2D du clavier tactile, il est possible de faire résoudre des équations liées avec différentes contraintes. Recherchons les coordonnées du point D telle que :

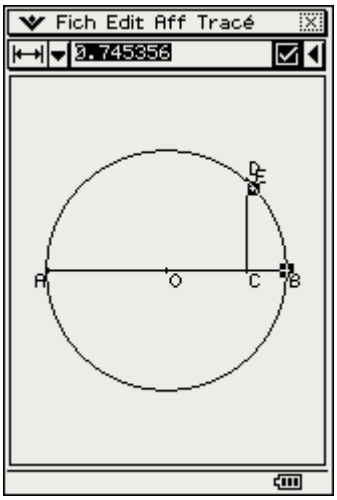
$$\begin{cases} D\ est\ sur\ le\ cercle\ \varphi \\ L'abscisse\ de\ D\ vaut \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Soit,

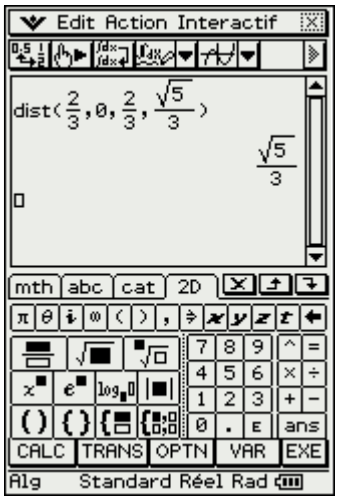
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Capture 2.3 : On trouve directement une solution positive adéquate :

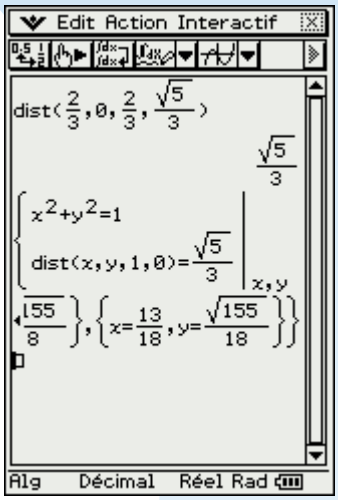
$$\boldsymbol{D}\left(\begin{matrix} \boldsymbol{\frac{2}{3}} \\ \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{3}} \end{matrix}\right)$$



Capture 3.1



Capture 3.2



Capture 3.3

Capture 3.1 : Pour définir le point E, il nous faut deux équations. :
Le fait qu'il soit sur le cercle
et, la longueur BE=CD ce que nous pouvons traduire par :

$$dist(x, y, 1,0) = CD$$

Capture 3.2 : Le calcul de la longueur CD est trivial, il nous permet de vérifier notre formule définie précédemment:

$$dist(a, b, c, d) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

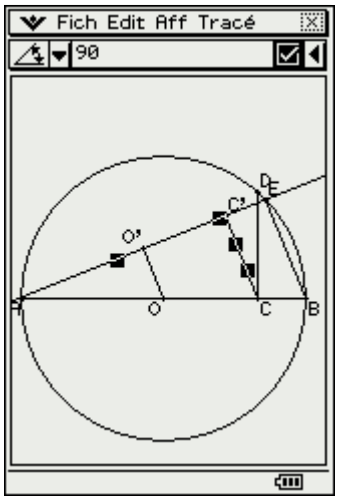
$$\boldsymbol{CD = \frac{\sqrt{5}}{3}}$$

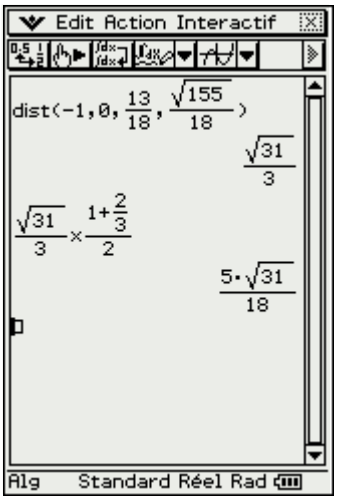
Capture 3.3 : Laissons la calculatrice résoudre cette association d'équations :

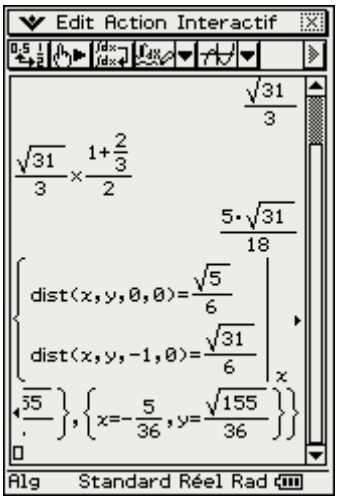
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ dist(x, y, 1,0) = \dfrac{\sqrt{5}}{3} \end{cases}$$

On trouve à nouveau une solution positive adéquate :

$$\boldsymbol{E\begin{pmatrix} \frac{13}{18} \\ \frac{\sqrt{155}}{18} \end{pmatrix}}$$







Capture 4.1 *Capture 4.2* *Capture 4.3*

Capture 4.1 et 4.2 :

Dessinons les points O' et C'. Et, calculons la distance AE :

$$AE = \frac{\sqrt{31}}{3}$$

Dans le triangle AEB, la propriété des droites des milieux, nous donne :

$$OO' = \frac{1}{2}EB = \frac{\sqrt{5}}{6}$$

Et,

$$OO' = \frac{1}{2}AE = \frac{\sqrt{31}}{6}$$

Capture 4.2 : Puis, en utilisant la propriété de Thalès dans le triangle AEB, on obtient :

$$\boldsymbol{CC' = \frac{AC}{AB} \times AE}$$

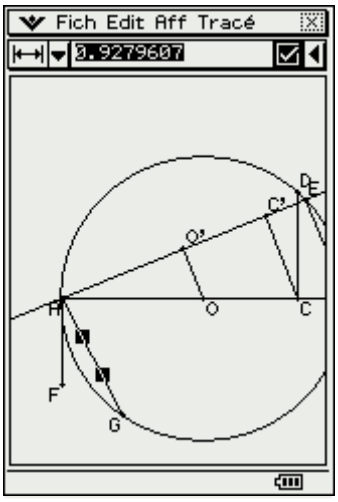
$$\boldsymbol{CC' = \frac{5\sqrt{31}}{18}}$$

Capture 4.3 : En résolvant ces équations, nous trouvons les coordonnées du point O' :

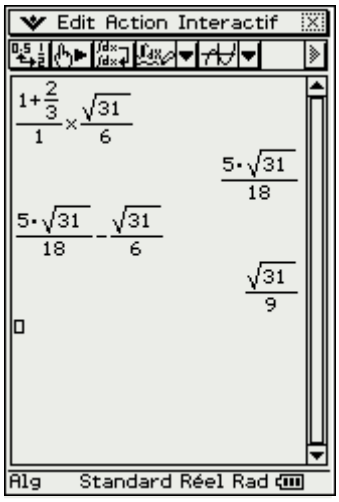
$$\begin{cases} AO' = \dfrac{\sqrt{31}}{6} \\ OO' = \dfrac{\sqrt{5}}{6} \end{cases}$$

On trouve à nouveau une solution avec une ordonnée positive adéquate :

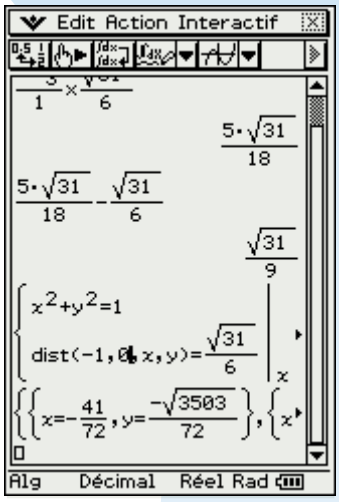
$$\boldsymbol{O'\left(\frac{-5}{36}\right)}$$
$$\boldsymbol{\left(\frac{\sqrt{155}}{36}\right)}$$



Capture 5.1



Capture 6.1



Capture 6.2

Capture 5.1 : Plaçons le point F tel quel AF= O'C'. Puis, le point G sur le cercle tel que AG = AO'.

Capture 6.2 : Dans le triangle AC'C, on peut à nouveau utiliser la propriété de Thalès pour trouver la longueur O'C' :

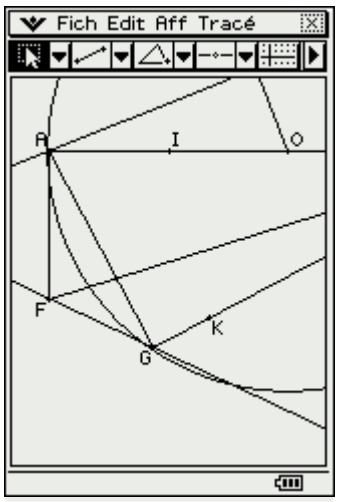
$$O'C' = \frac{\sqrt{31}}{9}$$

Puis, avoir les coordonnées du point F :

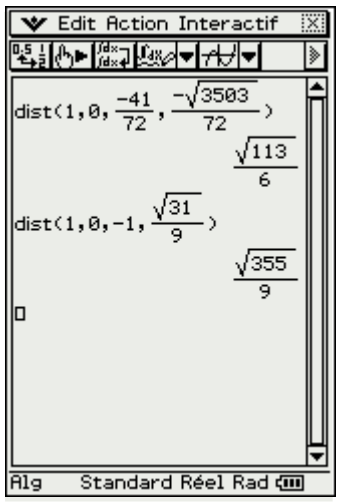
$$\boldsymbol{F\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{\sqrt{31}}{9} \end{pmatrix}}$$

Capture 6.3 : A nouveau utilisons la distance et le fait que le point soit sur le cercle pour trouver les coordonnées du point G :

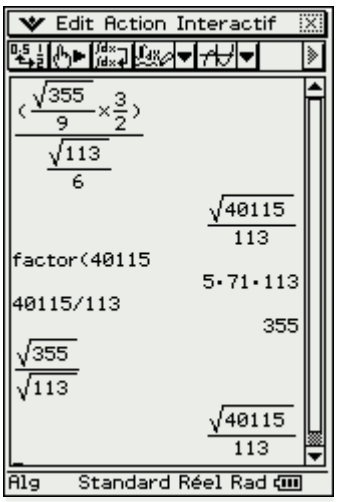
$$\boldsymbol{G\begin{pmatrix} -\frac{41}{72} \\ -\frac{\sqrt{3503}}{72} \end{pmatrix}}$$



Capture 7.1



Capture 7.2



Capture 7.3

Capture 7.1 : Soit I milieu de [AO]. On a :

$$BI = \frac{3}{2}$$

Et, donc par construction :

$$\boldsymbol{BK = \frac{3}{2}}$$

Capture 7.2 : Il suffit de calculer les distances BG et BF dont on connait les coordonnées de tous les points qui y sont acteurs.

$$BG = \frac{\sqrt{113}}{6}$$

Et,

$$BF = \frac{\sqrt{355}}{9}$$

Capture 7.3 : A nouveau, une utilisation de la propriété de Thalès va nous permettre de trouver la longueur du côté BL en utilisant les triangles BLK et BLG

$$BL = \frac{BK}{BG} \times BF$$

Soit,

$$\boldsymbol{BL = \frac{\sqrt{355}}{\sqrt{113}}}$$

Ainsi, on trouve que :

$$\boldsymbol{\pi \approx \frac{355}{113}}$$

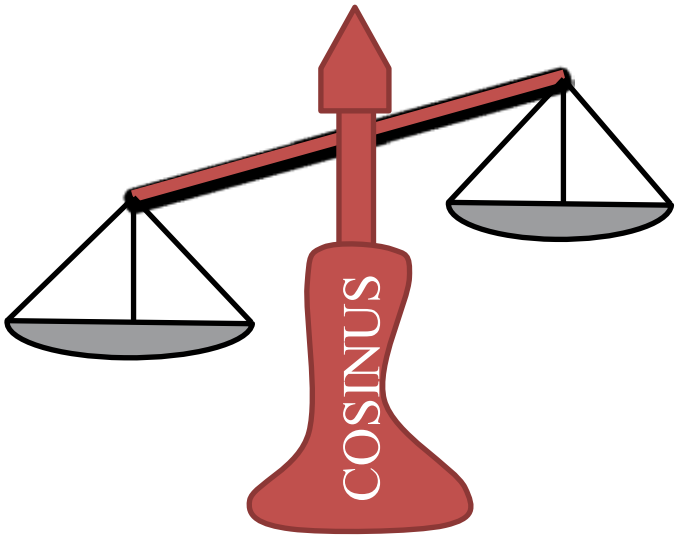
Notes personnelles

Triangle et formule d'Al-Kashi

On sait tous que le triangle 3,4, 5 est un triangle rectangle.

Mais qu'en est-il du triangle 4,5,6 ? Peut-on calculer la mesure de son plus grand angle ?

Pistes et réflexions

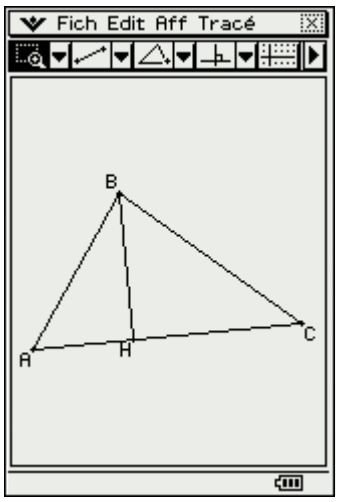


Dans un premier temps, nous allons retrouver la formule d'Al-Kashi permettant de généraliser le théorème de Pythagore (aussi appelé la **loi des cosinus**)

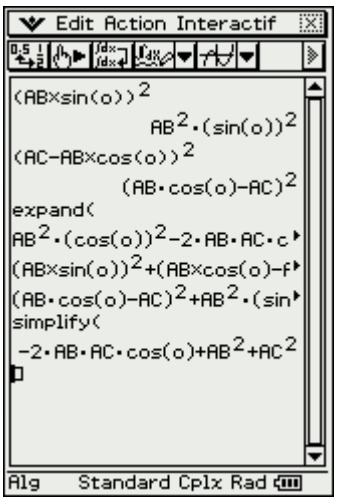
Puis, nous allons calculer la mesure des angles du triangle 4,5,6 de deux façons directement via la géométrie dynamique de la calculatrice et via la formule trouvée précédemment.

Enfin, nous allons créer un programme pour faire le calcul directement via différentes longueurs d'un triangle.

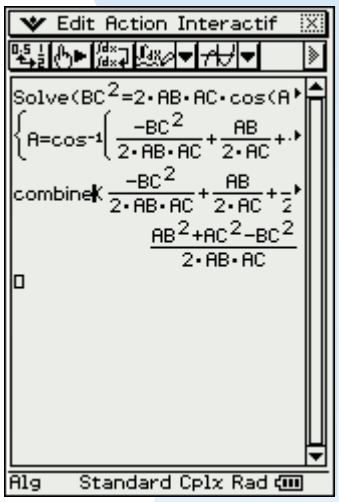
Partie 1 : Formule d'Al-Kashi



Capture 1.1



Capture 1.2



Capture 1.3

Capture 1.1 : Soit ABC un triangle quelconque et soit [BH] la hauteur issue de B.
Dans le triangle ABH rectangle en H, on a :

$$BC = AB \times Sin(\hat{A})$$
$$AH = AB \times Cos(\hat{A})$$

Et, logiquement pour le triangle ABC :

$$CH = AC - AB \times Cos(\hat{A})$$

Capture 1.2 : On peut généraliser le théorème de Pythagore dans le triangle BHC pour calculer BC, à savoir :

$$\mathbf{BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AC \times AB \times \cos(\hat{A})}$$

Le calcul formel de la calculatrice nous donne directement la **formule d'Al-Kashi** précédente.

Capture 1.3 : Et ainsi, on peut calculer la mesure de l'angle Â directement :

On trouve que :

$$\mathbf{Cos}(\hat{A}) = \frac{\mathbf{AB^2 + AC^2 - BC^2}}{\mathbf{2 \times AC \times AB}}$$

La fonction *solve()* de la calculatrice semble sans limite dans la gestion des lettres. Ainsi, on demande directement la valeur de la mesure de l'angle $\hat{A}$ par l'expression :

$$solve(\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2 \times \mathrm{AC} \times \mathrm{AB} \times \cos(\mathrm{A}), \mathrm{A})$$

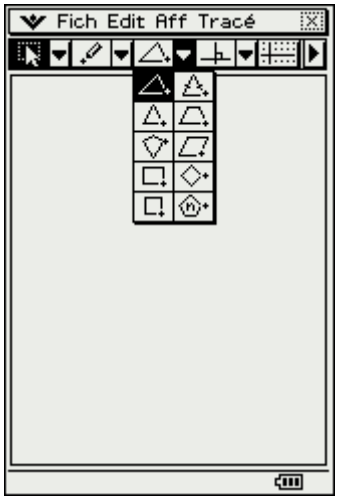
Et, on retrouve :

$$\hat{\mathrm{A}} = \mathbf{Cos^{-1}}\left(\frac{\mathbf{AB^2 + AC^2 - BC^2}}{\mathbf{2 \times AC \times AB}}\right) + \boldsymbol{k} \times \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}$$

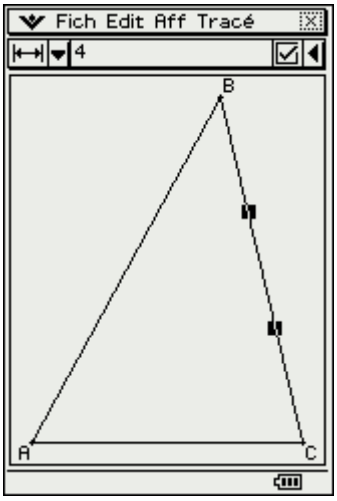
Avec, k un nombre entier.

Partie 2 : Résolution direct dans le mode dynamique

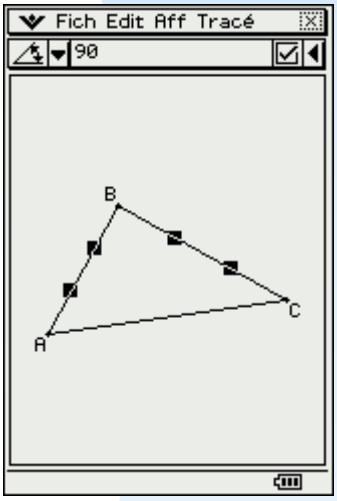
Un premier pas avec le triangle égyptien :



Capture 2.1



Capture 2.2



Capture 2.3

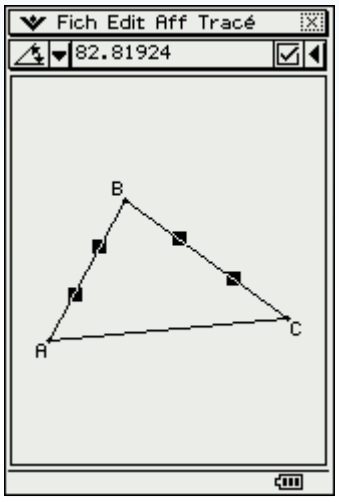
Capture 2.1 : Le mode de géométrie dynamique avec la gestion des contraintes permet de construire la figure directement. On y fait apparaître un triangle quelconque.

Capture 2.2 : En sélectionnant chacun des côtés, on peut imposer la longueur voulue. Ici, le but est de construire le triangle 3,4,5 si célèbre.

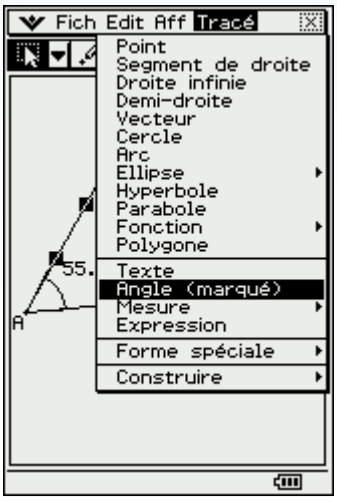
Capture 2.3 : En sélectionnant deux côtés, on peut lire l'angle formé.

On retrouve ici, que l'angle $\widehat{B}$ est un angle droit.

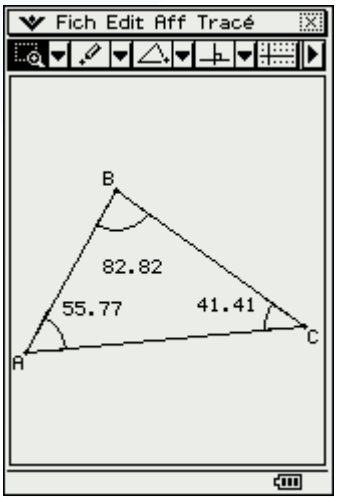
Notre cas d'étude :



Capture 2.4



Capture 2.5



Capture 2.6

Capture 2.1 : Faisons de même pour le triangle 4,5,6 en imposant ces longueurs à un triangle quelconque. La sélection directe de deux côtés nous fait afficher une valeur pour la mesure de l'angle $\widehat{B}$:

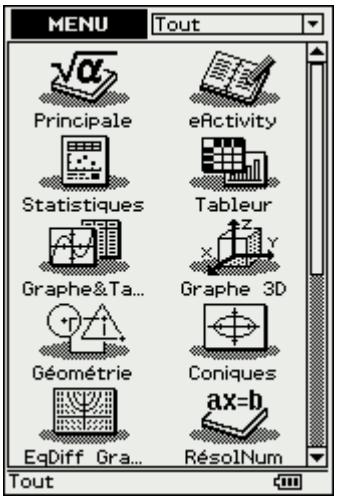
$$\widehat{\boldsymbol{B}} \approx \mathbf{82,82}°$$

Capture 2.2 : Dans l'onglet *tracé*, il est possible de marquer les angles directement sur la figure.

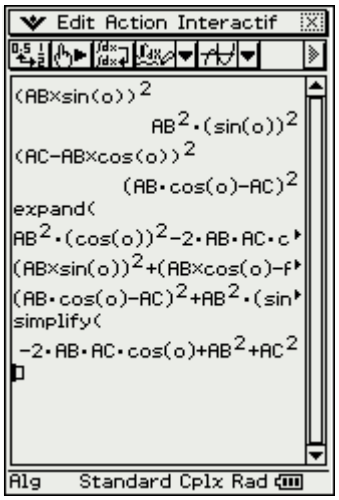
Capture 2.3 : Ainsi, on trouve que :

$$\widehat{\boldsymbol{A}} \approx \mathbf{55,77}°$$
$$\widehat{\boldsymbol{B}} \approx \mathbf{82,82}°$$
$$\widehat{\boldsymbol{C}} \approx \mathbf{41,41}°$$

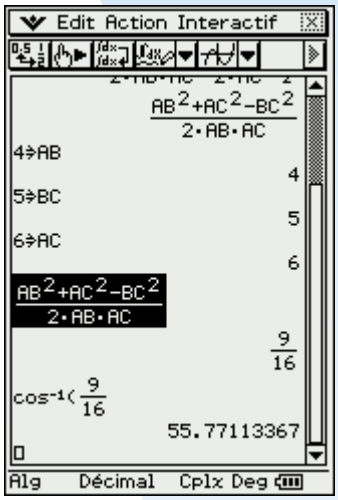
Partie3 : Résolution via la formule d'Al-Kashi



Capture 3.1



Capture 3.2



Capture 3.3

Capture 3.1 : Le mode *Principale* permet d'affecter des valeurs à des variables définies même par l'utilisation de plusieurs lettres associées.

Capture 3.2 : Retrouvons nos calculs précédents :

$$\mathbf{BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AC \times AB \times \cos(\hat{A})}$$

Capture 3.3 : Puis, imposer les valeurs suivantes :

$$AB = 4$$
$$BC = 5$$
$$AC = 6$$

Il suffit de relancer le calcul trouvé précédemment :

$$\hat{A} = \mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \times AC \times AB}\right)$$

$$\hat{A} = \mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{9}{16}\right)$$

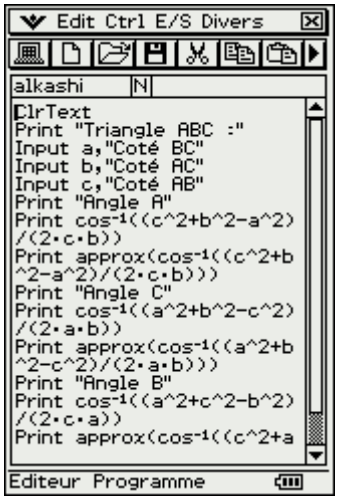
On retrouve donc :

$$\boldsymbol{\hat{A} \approx 55,77°}$$

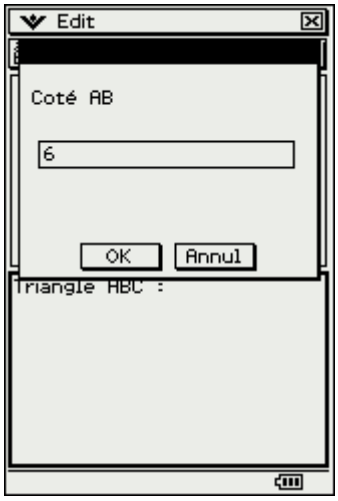
En faisant de même pour les autres angles, on obtient les valeurs trouvées graphiquement :

$$\hat{B} \approx 82,82°$$
$$\hat{C} \approx 41,41°$$

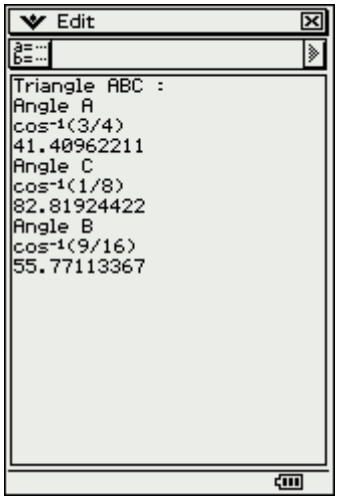
Partie4 : programmation rapide



Capture 4.1



Capture 4.2



Capture 4.3

Capture 4.1 : Dans le mode programme, il est possible directement de combiner les entrées/sorties avec un calcul utilisant la formule d'Al-Kashi vue en première partie.

Notons que pour demander une valeur, on note dans le programme :

$$input\ a, "Coté\ BC"$$

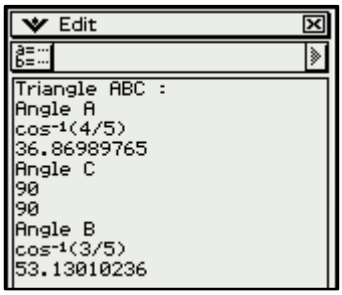
Pour la sortie, on utilise la commande *print* qui peut être combinée avec un calcul, ainsi pour l'angle en A, on obtient :

$$Print\ approx(\frac{cos^{-1}(c^2+b^2-a^2)}{2cb})$$

Où, *approx*() va fournir une valeur approchée du calcul.

Capture 4.2 : On entre les valeurs du triangle 4,5,6 …

Capture 4.3 : Dans la fenêtre de sortie du mode *programme*, on obtient pour le triangle 4,5,6 les réponses directement.



Notons que pour le triangle 3,4,5 on retrouve l'angle droit

Notes personnelles

Parabole et son foyer

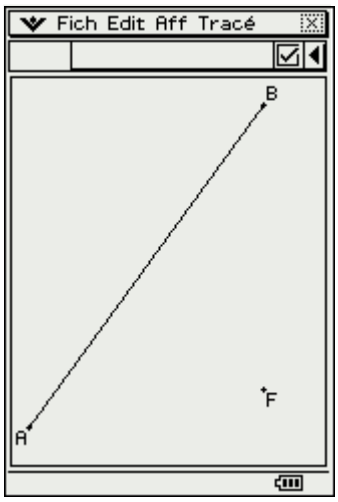
On peut définir une parabole comme l'ensemble des points équidistants à un point (le foyer) et une droite.

Pistes et réflexions

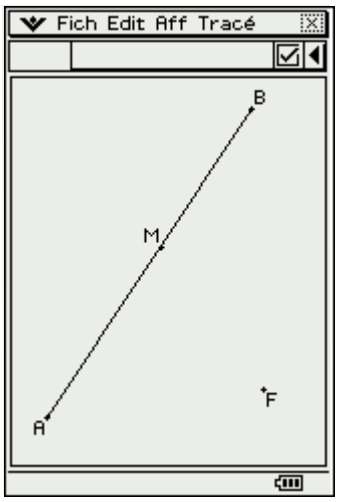
Nous allons illustrer ceci en utilisant la calculatrice et travailler sur un cas particulier permettant d'aboutir à la mise en équation de cet ensemble de points.

Puis, nous allons illustrer l'ensemble des points représentant une ellipse pour ouvrir le champ d'observations à d'autres lieux connus comme par exemple : l'ellipse.

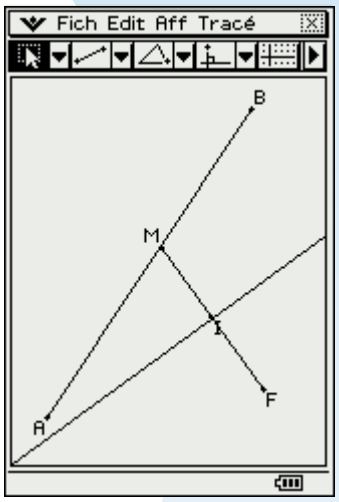
Partie 1 : Lieu géométrique



Capture 1.1



Capture 1.2

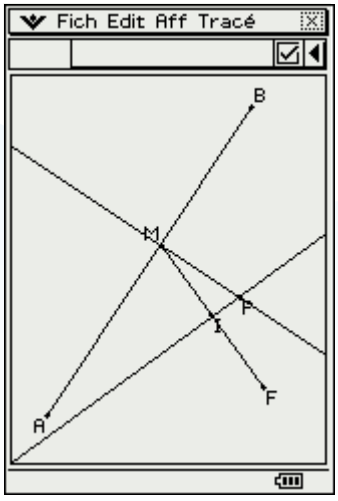


Capture 1.3

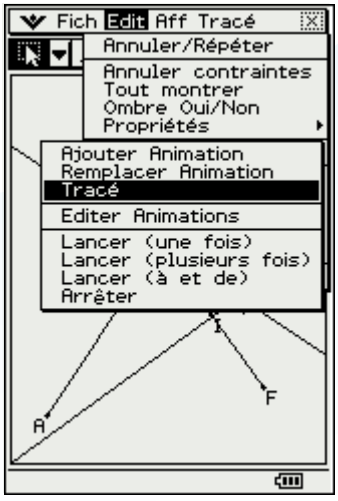
Capture 1.1 : Dans le mode géométrie, dessinons un segment [AB] et un point F représentant le foyer.

Capture 1.2 : On place un point M mobile sur le segment [AB].
L'utilisation d'un segment va nous permettre de définir l'animation qui se construit toujours entre un point se déplaçant sur un ensemble fermé (segment, cercle …)

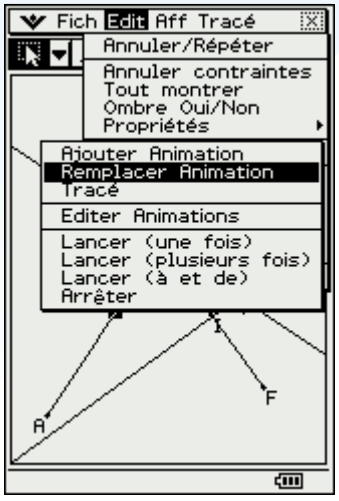
Capture 1.3 : Dessinons la médiatrice du segment [MF].
La notion d'équidistance se retrouve dans les propriétés d'une médiatrice.



Capture 1.4



Capture 1.5

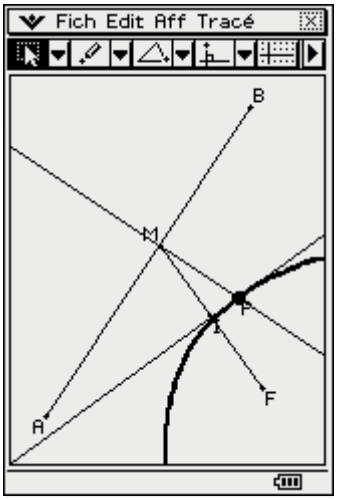


Capture 1.6

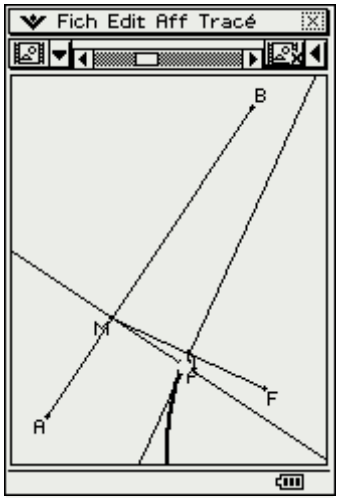
Capture 1.4 : La perpendiculaire à [AB] passant par M coupe la médiatrice précédente en P.
Cette droite va nous donner l'idée de distance à une droite du fait de son angle droit.
Le triangle MPF est isocèle. Ainsi, le point P est sur la parabole.

Capture 1.5 : On sélectionne le point P puis, on active la trace.

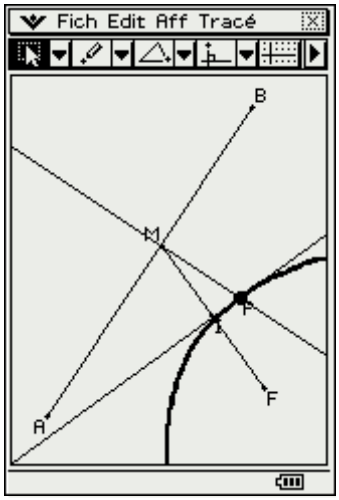
Capture 1.6 : Il suffit de définir l'animation en sélectionnant le segment [AB] et le point M mobile sur cet ensemble fermé.



Capture 1.7



Capture 1.8



Capture 1.9

Capture 1.7 : On lance l'animation du point M.

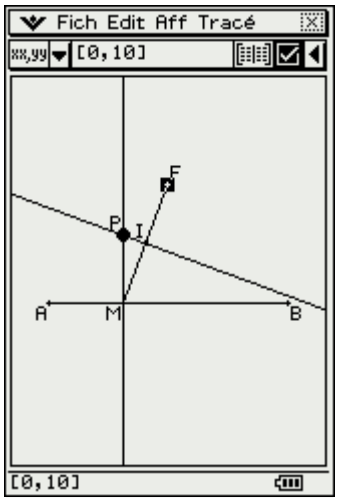
Capture 1.9 : Une parabole se dessine point par point.

Partie 2 : Lieu géométrique, un cas particulier

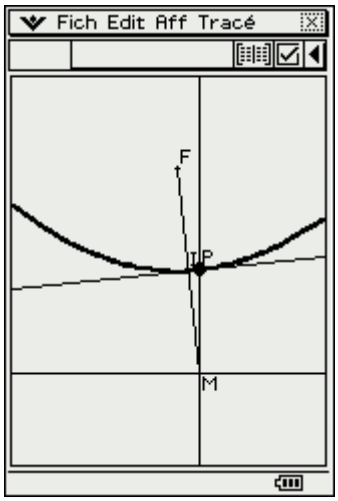
Dans un repère orthonormé, trouvez l'ensemble des points équidistants d'une droite (AB) et d'un point F sachant que :

F(0,10)
B(-10,0) et C(10,0)

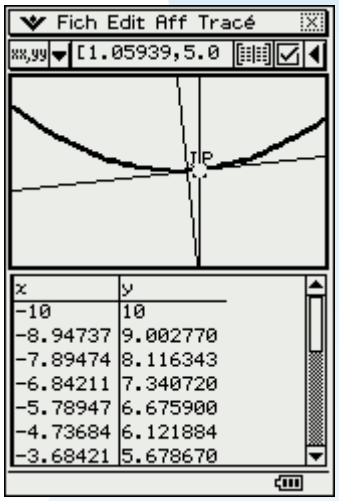
La calculatrice calcule l'équation de cette parabole :



Capture 2.1



Capture 2.2

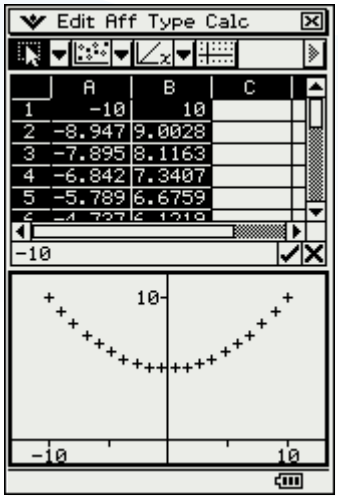


Capture 2.3

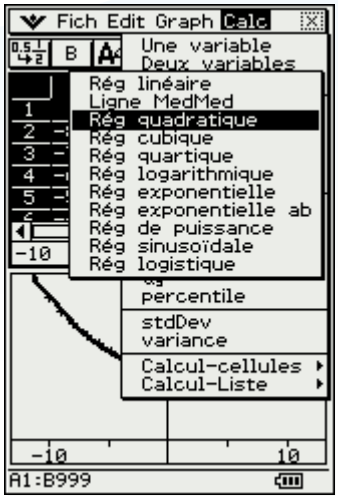
Capture 2.1 : Reprenons l'animation précédente en affectant les coordonnées voulues à chacun des points.

Capture 2.2 : L'ensemble des points représentant la parabole apparait en relançant l'animation du point M.

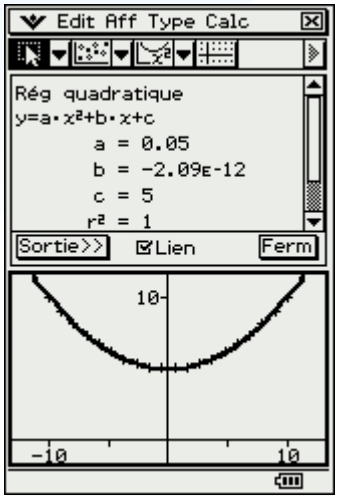
Capture 2.1 : Il est possible de récupérer dans des listes les coordonnées du point P traçant la parabole.



Capture 2.4



Capture 2.5



Capture 2.6

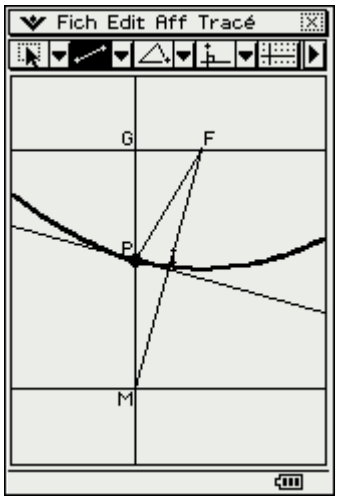
Capture 2.4 : Importons via un *copier/coller* les coordonnées du point P dans le tableur de la calculatrice. Et traçons l'ensemble des points par le menu *Graph*, *nuage de points*.

Capture 2.5 : Cherchons l'équation cartésienne de cet ensemble de points via une régression quadritique.

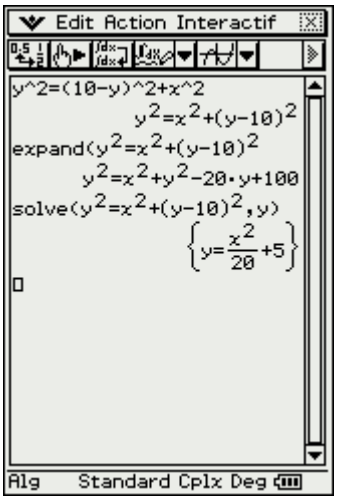
Capture 2.6 : On trouve que cette parabole a pour équation :

$$y = \frac{1}{20}x^2 + 5$$

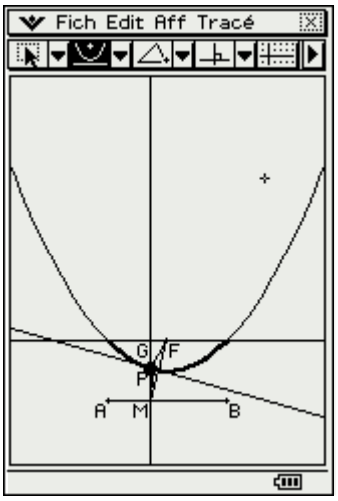
Retrouvons l'équation via le calcul direct :



Capture 2.7



Capture 2.8



Capture 2.9

Capture 2.7 : Soit le point G tel que (GF) soit perpendiculaire à (PM).
Posons :

$$P(x; y)$$

Et,

$$M(x; 0)$$
$$GF = |x|$$
$$PG = |10 - x|$$

Comme le triangle MPF est isocèle en P :

$$PF = |y|$$

Capture 2.8 : On peut utiliser la propriété de Pythagore dans le triangle PGF rectangle en G :
Ainsi :

$$PF^2 = PG^2 + GF^2$$
$$y^2 = (10 - y)^2 + x^2$$
$$y^2 = 100 - 20y + y^2 + x^2$$
$$20y = 100 + x^2$$

On retrouve donc :

$$y = \frac{1}{20}x^2 + 5$$

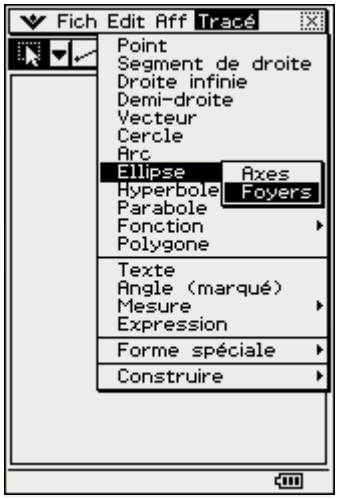
Capture 2.9 : Retournons dans le mode de géométrie pour faire afficher la courbe représentée par cette équation.

La superposition du lieu recherché dans l'énoncé initial et de la courbe représentant la parabole nous permet d'avoir une confirmation visuelle.

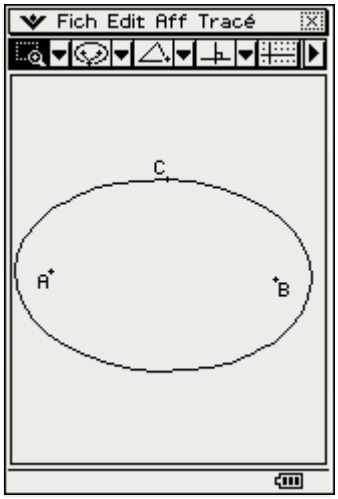
Partie 3 : Lieu géométrique, l'ellipse

Dans cette dernière partie, illustrons simplement à l'aide de la géométrie dynamique l'ensemble des points représentant une ellipse.

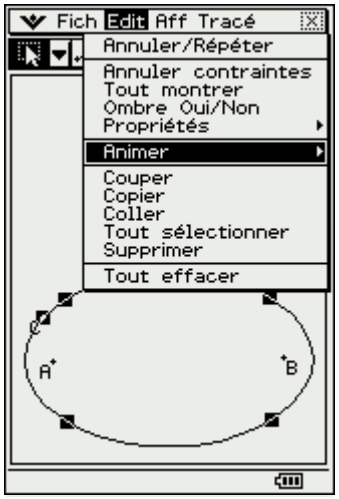
Construction :



Capture 3.1



Capture 3.2



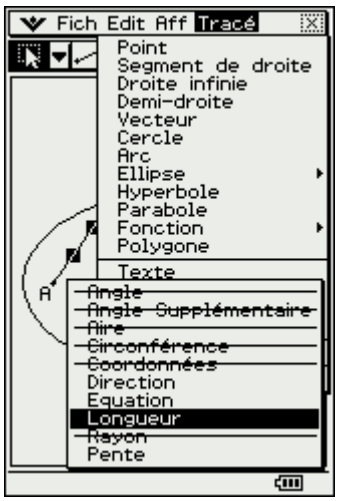
Capture 3.3

Capture 3.1 : L'onglet Tracé permet de construire directement une ellipse en fonction de ses foyers.

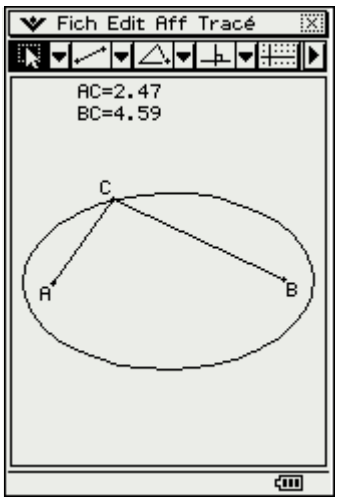
Capture 3.2 : L'écran tactile de la calculatrice nous permet de dessiner les deux foyers en cliquant simplement.

Capture 3.1 : En sélectionnant le point C et l'ellipse ainsi créée, on peut définir une nouvelle animation.

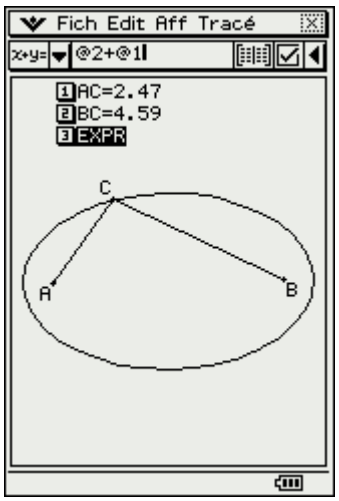
Mesures et animations :



Capture 3.4



Capture 3.5



Capture 3.6

Capture 3.4 : Il suffit d'insérer un texte représentant les distances du point C aux foyers.

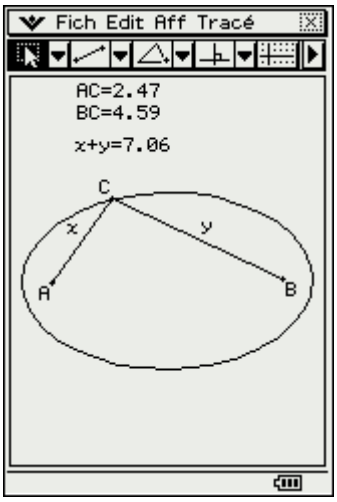
Capture 3.4 : Le texte est paramétrable, on peut y noter le nom des longueurs voulues.

Capture 3.4 : Il suffit alors d'insérer une *expression*. Ici, le calcul de la distance AC+CB : somme des distances du point se baladant sur l'ellipse aux foyers.

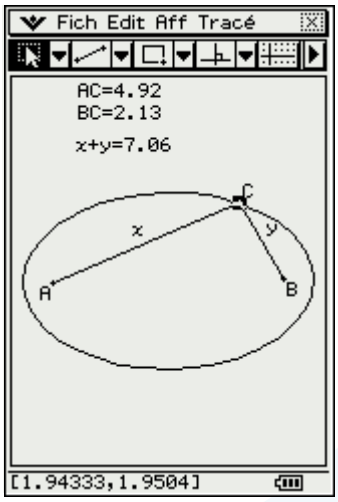
$$x + y = @1 + @2$$

Chacune des lignes rajoutées à la figure dynamique est référencée par un numéro utilisant l'arrobas dans sa dénomination.

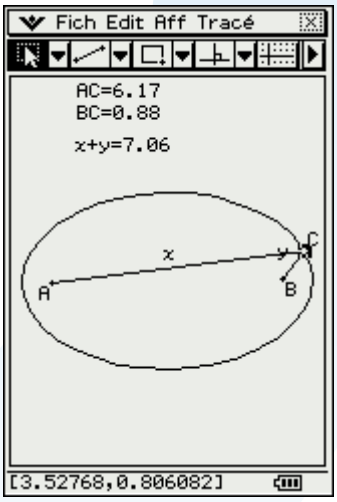
Conclusion :



Capture 3.7



Capture 3.8



Capture 3.9

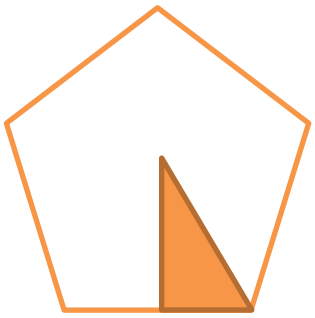
Capture 3.7 : Lançons l'animation.

Capture 3.9 : On retrouve que l'ellipse est l'ensemble des points tel que la distance aux foyers est constante.

Pentagone et sinus

Le but de ce travail est de calculer la valeur exacte de $\boldsymbol{SIN}(\frac{\pi}{5})$ *et d'avoir une construction à la règle et au compas d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle dont on connait le rayon.*

Pistes et réflexions



Une construction étapes par étapes :

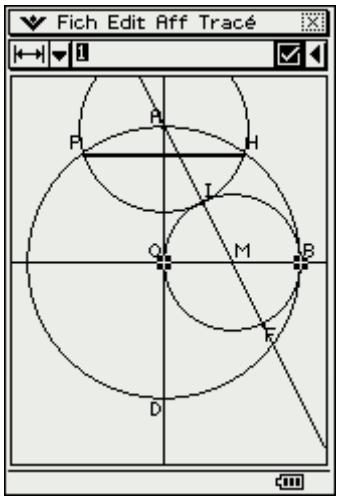
- *Construire un cercle* C_1 *de centre O et de rayon OB*
- *Construire la perpendiculaire à (OB) passant par O, elle coupe le cercle* C_1 *en deux points dont l'un se nomme A*
- *Soit M le milieu de [OB]*
- *Construire le cercle* C_2 *de centre M et de diamètre OB*
- *Soit I l'intersection de ce cercle et de la droite (AM)*
- *Soit* C_3 *le cercle de centre A et de rayon AI*
- *Les deux points d'intersection des cercles* C_1 *et* C_3 *forment le premier côté du pentagone.*
- *Il suffit de reporter sa mesure pour compléter la figure.*

Retrouvons l'égalité suivante :

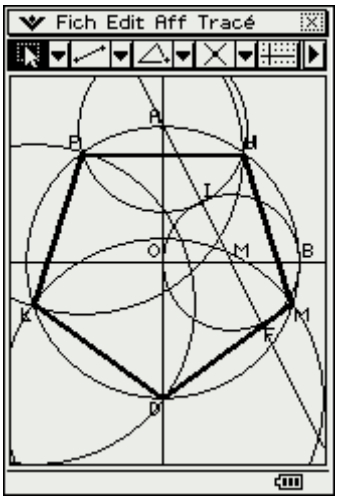
$$\boldsymbol{SIN}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{5}}\right) = \frac{\sqrt{\boldsymbol{2(5-\sqrt{5})}}}{\boldsymbol{4}}$$

Construction :

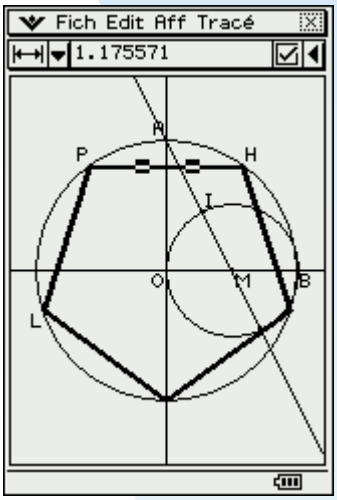
Le mode Géométrie Dynamique de la calculatrice permet une construction rapide de la figure.



Capture 1.1



Capture 1.2



Capture 1.3

Il est possible de définir après construction de la figure une contrainte. Ici, par exemple, nous prendrons comme rayon OB=1. (*Capture 1.1*)

La construction décrite permet donc rapidement d'avoir un côté affiché sur le cercle. Il suffit dès lors de reproduire la longueur PH avec le compas pour avoir les 5 côtés du pentagone qui apparaissent. Notons que nous pouvons faire apparaitre en gras la figure construite. (Capture 1.2)

En sélectionnant un segment, nous avons sa longueur directement. (*Capture 1.3*).

Ainsi, pour un rayon de 1 unité, on trouve environ que le pentagone mesure 1.17 de côté.

Une longueur que l'on peut retrouver par le calcul en utilisant l'angle au centre et un triangle rectangle adéquat :

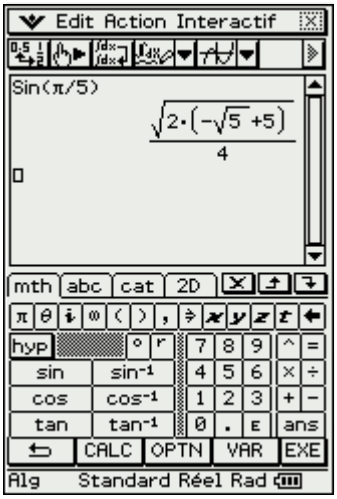
$$Sin\left(\frac{2\pi}{10}\right) = \frac{Côté}{2 \times Rayon}$$

Ici,

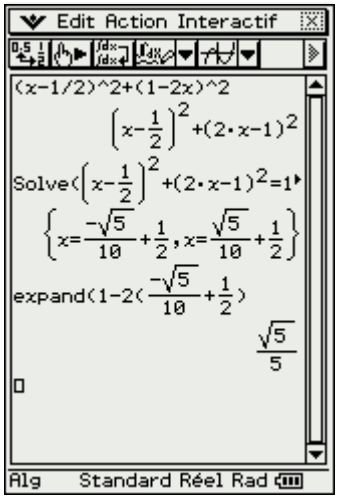
$$\boldsymbol{Côté = 2Sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \approx 1.18}$$

Construction :

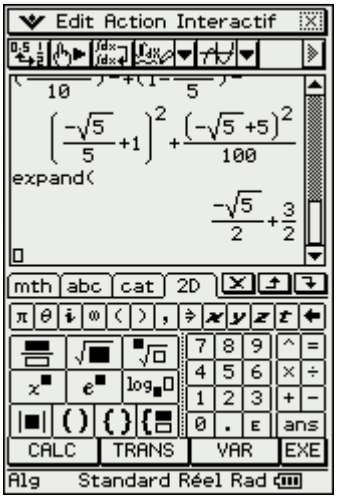
Le mode CAS de la calculatrice va nous permettre de résoudre rapidement quelques équations pour retrouver la longueur PH d'un côté sans utiliser le sinus de l'angle au centre. Ainsi, nous aurons un moyen de le calculer en valeur exacte.



Capture 2.1



Capture 2.2



Capture 2.3

Valeur exacte :

Le mode *principale* de la calculatrice nous offre directement la valeur exacte de $SIN\left(\frac{2\pi}{10}\right)$.

A nous de le retrouver via le calcul. (*capture 2.1*)

Coordonnées de I :

Cherchons les coordonnées de I, intersection de la droite (AM) et du cercle C_2.
On a les équations suivantes dans le repère (O,B,A) :

$$(BM):\ y = -2x + 1$$

$$C_2:\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

Résolvons une équation du second degré pour trouver les coordonnées de I (*capture 2.1*) :

$$\boldsymbol{I\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10};\frac{\sqrt{5}}{5}\right)}$$

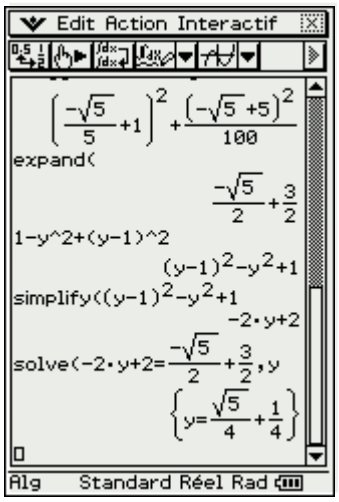
Distance BI :

La distance BI nous donne le rayon du cercle construisant le premier côté du pentagone. Or, comme dans l'équation d'un cercle, nous avons un rayon au carré : il est préférable de calculer BI².

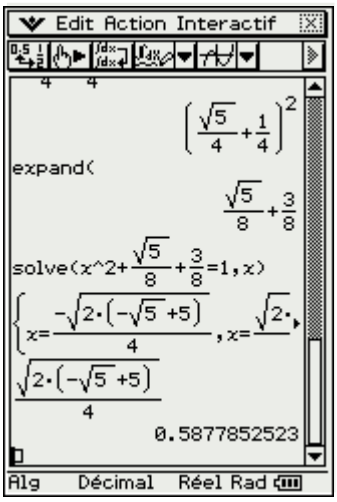
$$\boldsymbol{BI^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

Coordonnées des points P et H :

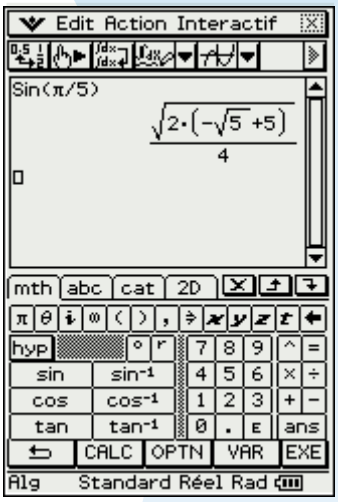
Cherchons les coordonnées des points d'intersection des cercles C_3 et C_1 .



Capture 3.1



Capture 3.2



Capture 3.3

On a les équations suivantes :

$$C_1:\ x^2 + y^2 = 1$$

$$C_3:\ x^2 + (y-1)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Résolvons une équation du second degré pour trouver les coordonnées de I (*capture 2.1*) :

$$C_3:\ 1 - y^2 + (y-1)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

On trouve (*capture 3.1*) :

$$\boldsymbol{y = \frac{1+\sqrt{5}}{4}}$$

En injectant y dans l'équation du cercle C_1 on retrouve les coordonnées des abscisses (*capture 3.2*):

$$P\left(-\frac{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{4};\ \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$$

$$H\left(\frac{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{4};\ \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$$

Il suffit de conclure (*capture 3.3*) :

$$\boldsymbol{SIN\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{4}}$$

Classpad 330 PLUS : fonction dsolve()

D'après le sujet de BAC (Métropole 2010), exercice 1, partie A, épreuve commune à tous les candidats

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y' + y = e^{-x}$$

1.
Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels R par :

$$u(x) = xe^{-x}$$

est une solution de l'équation différentielle (E).
2.
On considère l'équation différentielle (E') :

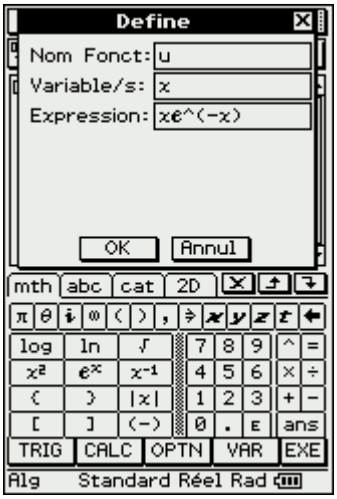
$$y' + y = 0$$

Résoudre l'équation différentielle (E').
3.
Soit w une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction w est une solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction w − u est solution de l'équation différentielle (E).
4.
En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
5.
Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que g (0) = 2.

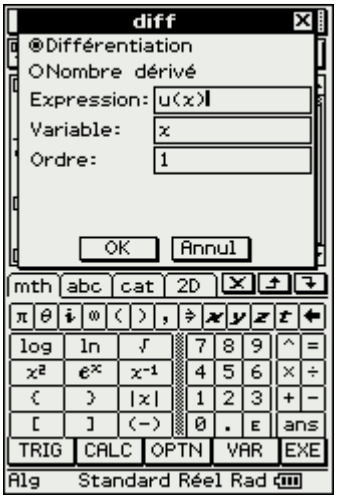
Pistes et interprétations : un outil de vérification et de validation

L'utilisation de la calculatrice va permettre un travail ordonné et soigné.
Le mode CAS va nous offrir directement les réponses adaptées au sujet.
Et, la grande souplesse des différents modes de cet outil permettra de valider les réponses trouvées via son mode graphique.

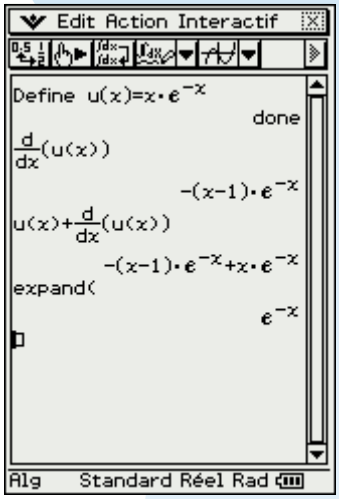
Question 1


Define
Nom Fonct: u
Variable/s: x
Expression: xe^(-x)
OK
Annul
mth abc cat 2D
log ln √ 7 8 9 ^ =
x² e^x x⁻¹ 4 5 6 × ÷
( ) |x| 1 2 3 + −
[ ] (-) 0 . ε ans
TRIG CALC OPTN VAR EXE
Alg Standard Réel Rad

Capture 1.1



Capture 1.2



Capture 1.3

Capture 1.1 : Dans le mode *principale*, il est possible d'utiliser l'assistant pour définir directement la fonction :

$$u(x) = xe^{-x}$$

Capture 1.2 : faisons de même pour sa fonction dérivée associée.

Capture 1.3 : On trouve alors :

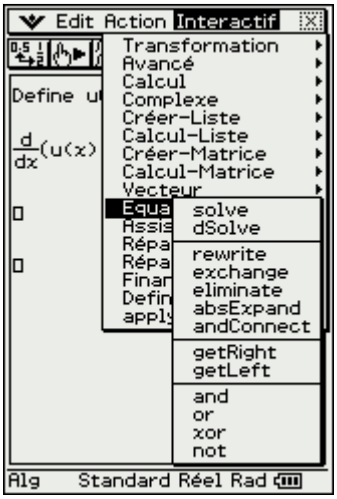
$$u'(x) = -(x-1)\,e^{-x}$$

Ainsi,

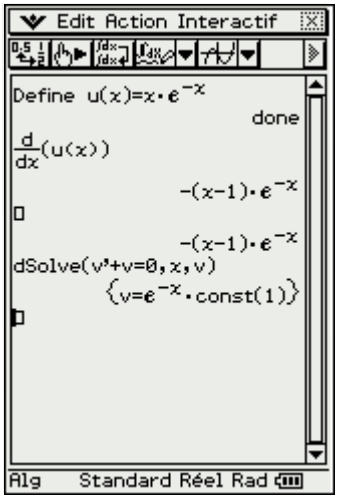
$$u'(x) + u(x) = e^{-x}$$

Ce qui répond au premier critère.

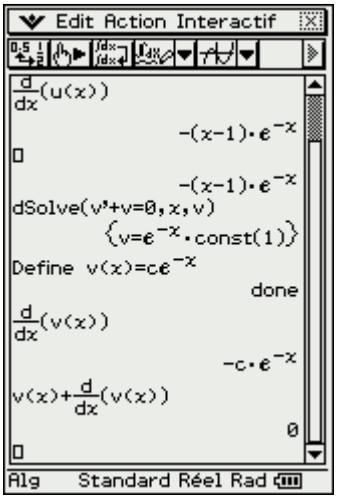
Question 2



Capture 2.1



Capture 2.2



Capture 2.3

Capture 2.1 : Il est possible de demander directement dans le mode CAS la résolution d'une équation différentielle. Pour suivre le sujet, nous allons nous limiter à demander simplement la résolution de cette équation intermédiaire :

$$v' + v = 0$$

Capture 2.2 : On trouve une solution paramétrée que nous pouvons définir dans la calculatrice pour la suite du problème :

$$v(x) = c.e^{-x}$$

Où, c est une constante qui dépendra des conditions initiales.

Capture 2.3 : Vérifions la solution, on trouve bien

$$v'(x) = -c.e^{-x}$$

Ainsi,

$$v' + v = 0$$

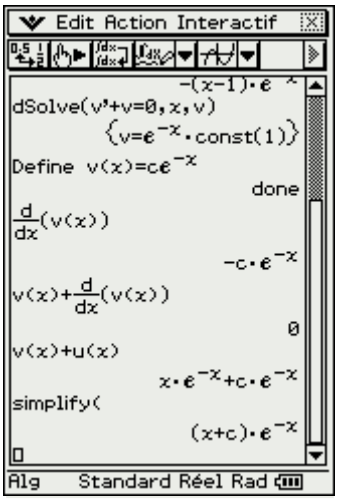
Ce qui répond au premier critère.

Question 3

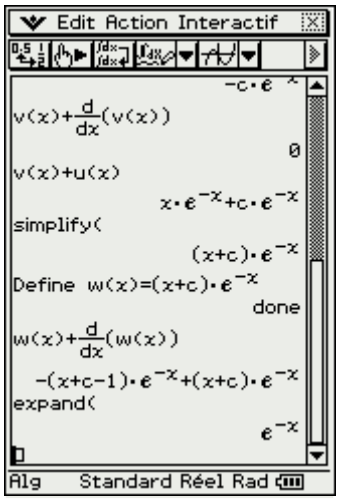
Un travail autour de la dérivée d'une différence permet de répondre à la question directement.

$$\boldsymbol{w'(x) - u'(x) = (w - u)'(x)}$$

Question 4



Capture 4.1



Capture 4.2

Capture 4.3

Capture 4.1 : On peut en déduire directement la forme des solutions pour l'équation différentielle initiale :

$$w(x) = u(x) + v(x)$$

Soit,

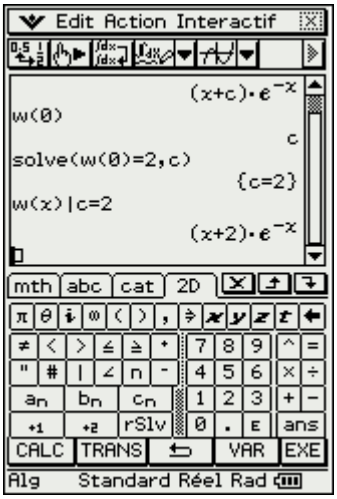
$$\boldsymbol{w(x) = (x + c).e^{-x}}$$

Capture 4.2 : Vérifions :

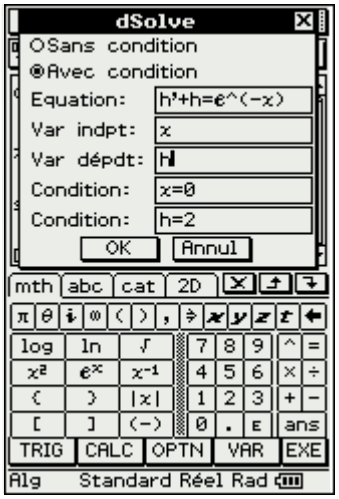
$$\boldsymbol{w(x) + w'(x) = e^{-x}}$$

Capture 4.3 : Une solution que la fonction **dsolve** nous aurait directement trouvée !

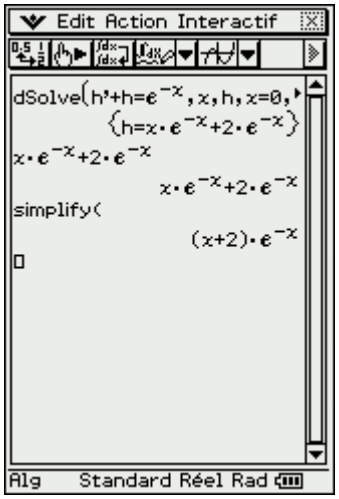
Question 5



Capture 5.1



Capture 5.2



Capture 5.3

Capture 5.1 : Le calcul de la constante vérifiant la condition initiale est simple. Nous pouvons l'aborder directement en faisant calculer $w(0)$:

$$w(0) = c$$

Soit,

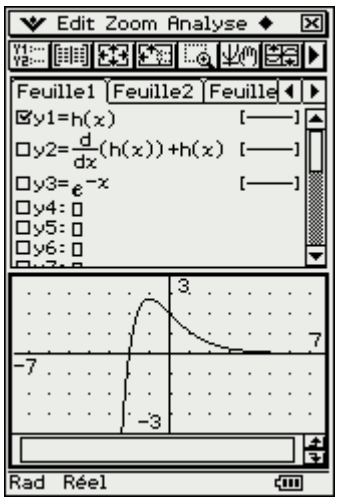
$$\boldsymbol{c = 2}$$

La fonction *solve* de la calculatrice permet de répondre aussi à la question. Il est possible d'affecter directement la valeur de la constante en utilisant la barre représentant le « sachant ». On fait alors calculer w(x) sachant que c=2 et on trouve la solution voulue :

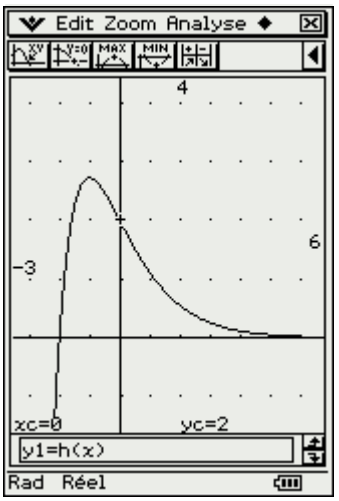
$$\boldsymbol{(x+2)e^{-x}}$$

Capture 5.2 et 5.3 : Une solution que la fonction **dsolve** nous aurait directement trouvée avec les solutions initiales.

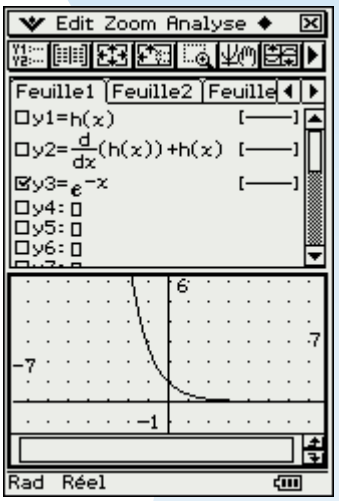
Question +



Capture 6.1



Capture 6.2



Capture 6.3

Capture 6.1 : Représentons graphiquement la fonction h trouvée précédemment. La définition dans le mode CAS est transférable dans le mode géométrique. Nul besoin de redéfinir la fonction ici.

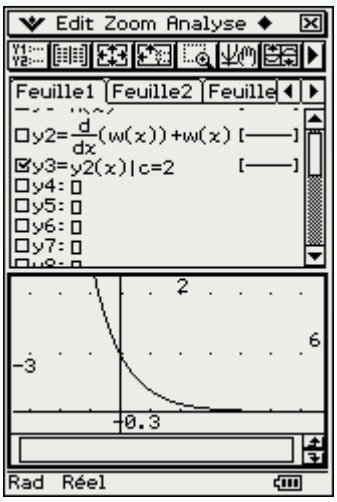
Capture 6.2 : Les conditions initiales sont respectées.

Capture 6.3 : Il est possible de tracer la représentation graphique d'une fonction définie par une autre associée à sa dérivée.
Nous vérifions ainsi graphiquement que :

$$\boldsymbol{h'(x) + h(x) = e^{-x}}$$

Notons qu'il est possible de définir la fonction à représenter directement en gardant le paramètre :

$$y3(x) = w'(x) + w(x) sachant\ que\ c = 2$$



Notes personnelles

Notes personnelles

CASIO Éducation
Immeuble Phénix 1
24 rue Émile Baudot - 91120 PALAISEAU
Email : education-france@casio.fr
Directeur de la publication : Keity Mardinli
Rédacteur en chef : Jean-Philippe Blaise
Réalisation : Arc'ad+
Diffusion : Professeurs de mathématiques exclusivement
Juillet 2012

CASIO®
www.casio-education.fr